SAYILAR TEORİSİ

1 Bölünebilme

Bölme Algoritması:
Her a ve $b \neq 0$ tam sayıları için

$$a = qb + r \quad \text{ve} \quad 0 \leq r < |b|$$

olacak şekilde q ve r tam sayıları tek türlü belirlenebilir. r sayısı a nın b ile bölümünden elde edilen kalandır. $r = 0$ durumunda b, a yı böler denir ve $b|a$ ile gösterilir.
Sıfırdan farklı a, b, x, y, z tam sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $x|y$ ve $y|z$ ise $x|z$,
2. $x|y$ ve $x|z$ ise $x|(ay + bz)$,
3. $x|y$ ise $xz|yz$,
4. $x|y$, $y|x$ ve $x, y > 0$ ise $x = y$.

Hepsi birden 0 olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının tamamını bölen en büyük pozitif tam sayıya bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü (OBEB) denir ve $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile gösterilir. $(a_1, a_2) = 1$ durumunda a_1 ve a_2 sayılarına aralarında asal denir.
Sıfırdan farklı a, b, c tam sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(a, b) = (b, a) = (-a, b)$,
2. $(a, b) \leq min\{|a|, |b|\}$,
3. $(a, b + ca) = (a, b)$,
4. $(a, b) = d$ ise $\left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right) = 1$.

Benzer şekilde hepsi birden 0 olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarının hepsi ile bölünebilen en küçük pozitif tam sayıya, bu sayıların ortak katlarının en küçüğü (OKEK) denir ve $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ile gösterilir.

Teorem 1. Her a, b pozitif tam sayıları için $a \cdot b = (a, b)[a, b]$ eşitliği sağlanır.

Öklid Algoritması: Pozitif a ve b tam sayıları $a > b$ olarak verildiğinde bölme algoritması kullanılarak $a = q_0 b + r_0$ olarak yazılır. Bu durumda

$$(a, b) = (q_0 b + r_0, b) = (r_0, b) = (b, r_0), \quad b < a,\ r_0 < b$$

elde edilir. Benzer şekilde b yi r_0 a bölerek

$$(a, b) = (b, r_0) = (r_0, r_1), \quad r_1 < r_0 < b < a$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse negatif olmayan r_i tam sayıları azalacağından bir k değeri için $r_k = 0$ ve $r_{k-1} \neq 0$ olur. Buraya kadar yapılan işlemler bir algoritma olarak ifade edilebilir.
Öklid Algoritması: $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve $a > b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, \quad 0 < r_0 < b \\
b &= q_1 r_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
r_{k-3} &= q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \quad 0 < r_{k-1} < r_{k-2} \\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \quad r_k = 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde q_i ve r_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ tam sayıları bulunur. $r_{k-1} | r_{k-2}$ olduğundan $(r_{k-2}, r_{k-1}) = r_{k-1}$ elde edilir. Buradan da $(a, b) = (b, r_0) = (r_0, r_1) = \cdots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = r_{k-1}$ bulunur. Yani a ile b nin OBEB i Öklid algoritmasındaki 0 dan farklı en son elde edilen kalandır.
Algoritmada $r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$ olduğundan $i \geq 2$ için r_i, r_{i-1} ve r_{i-2} ye bağlı olarak yazılabilir. Bu durumda $r_{k-1} = sa + tb$ olacak şekilde s ve t tam sayıları bulunabilir. Yani aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 2. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = (a, b) = sa + tb$ eşitliğini sağlayan s, t tam sayıları vardır.

Örnek 1. $2 = s \cdot 82 + t \cdot 26$ olacak şekilde s ve t tam sayılarını bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
82 &= 3 \cdot 26 + 4 \\
26 &= 6 \cdot 4 + 2 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0
\end{aligned}$$

olduğundan $2 = 26 - 6 \cdot 4 = 26 - 6(82 - 3 \cdot 26) = 19 \cdot 26 - 6 \cdot 82$ olur. Yani, $s = -6$ ve $t = 19$ olarak bulunur.

2 Asal Sayılar

1 den ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük tam sayılara asal sayı, asal olmayan 1 den büyük tam sayılara bileşik sayı denir.

Teorem 3 (Aritmetiğin Temel Teoremi)**.** Her n pozitif tam sayısı için $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ olacak şekilde p_i farklı asal sayıları ve r_i pozitif tam sayıları vardır. Ayrıca n sayısı, çarpanların sırasına bakılmazsa tek şekilde yazılabilir.

Teorem 4. Asal sayılar kümesinin sonsuz tane elemanı vardır.

İspat. Bu teorem olmayan ergi yöntemi ile ispatlanabilir. Asal sayılar kümesinin sonlu sayıda elemanı olduğunu kabul edelim ve kümenin elemanlarına $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ diyelim. $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ sayısına bakalım. N sayısının p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ile bölümünden kalan 1 olacağı için N, p_i ile bölünmez. Bu durumda N nin hiç bir asal böleni olamaz ve çelişki elde edilir. Dolayısıyla asal sayılar kümesinin sonsuz elemanı vardır. □

Teorem 5. Her $n > 1$ tam sayısı için $n < p < 2n$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır.

Teorem 6. a ve b aralarında asal tam sayılar olmak üzere $\{an + b\}$ dizisinin sonsuz tane asal terimi vardır.

3 Denklik Çözümleri

3.1 Modüler Aritmetik

Pozitif bir n tam sayısı için $n \mid (a - b)$ ise a mod n de b ye denktir denir ve tanımlanan bu bağıntı tam sayılar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
Temel Özellikler: $a_1 \equiv b_1 \mod n$ ve $a_2 \equiv b_2 \mod n$ olmak üzere

- $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod n$
- $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \mod n$
- $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \mod n$
- $m \in N$ ise $a_1^m \equiv b_1^m \mod n$
- P tam sayı katsayılı bir polinom ise $P(a_1) \equiv P(b_1) \mod n$

denklikleri sağlanır.
Modüler aritmetikde bölme işlemi tanımlı değildir. Bir a tam sayısı için $ab \equiv 1 \mod n$ olacak şekilde bir b tam sayısı varsa, b ye a nın $\mod n$ deki tersi denir ve $a^{-1} \equiv b \mod n$ ile gösterilir. Örneğin $\mod 4$ te 3 ün tersi varken 2 nin tersi yoktur.

Örnek 2. $43x \equiv 10 \mod 50$ denkliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm. Soruyu çözmek için önce 43 ün $\mod 50$ deki tersini bulacağız. Öklid algoritmasını 50 ve 43 için uygularsak.

$$\begin{aligned} 50 &= 1 \cdot 43 + 7 \\ 43 &= 6 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$

olduğundan $1 = 43 - 6 \cdot 7 = 43 - 6 \cdot (50 - 1 \cdot 43) = 7 \cdot 43 - 6 \cdot 50$ olur. Buradaki $7 \cdot 43 - 6 \cdot 50 = 1$ eşitliğini mod 50 de incelersek $43 \cdot 7 \equiv 1 \mod 50$, yani $43^{-1} \equiv 7 \mod 50$ buluruz. Buradan

$$\begin{aligned} 43x &\equiv 10 \mod 50 \\ x &\equiv 43^{-1} \cdot 10 \mod 50 \\ x &\equiv 7 \cdot 10 \mod 50 \\ x &\equiv 20 \mod 50 \end{aligned}$$

elde edilir.
Örnekteki fikri genelleştirirsek n ile aralarında asal olan her x tam sayısı için $rx + sn = 1$ olacak şekilde r ve s tam sayıları bulunabileceği için $rx \equiv 1 \mod n$ ve dolayısıyla $x^{-1} \equiv r \mod n$ olur. Yani $(n, x) = 1$ olan tüm x tam sayılarının mod n de tersi vardır.
Şimdi $d = (a, n) > 1$ olmak üzere $ax \equiv d \mod n$ denkliğini çözmeye çalışalım. Öklid algoritmasından $ra + sn = d$ elde edilir. Buradan $r\frac{a}{d} + s\frac{n}{d} = 1$ ve $r\frac{a}{d} \equiv 1 \mod \frac{n}{d}$ denklikleri bulunur. Yani $ax \equiv d \mod n$ denkliğinin çözümleri ile $\frac{a}{d}x \equiv 1 \mod \frac{n}{d}$ sisteminin çözümleri aynıdır.

Örnek 3. Aşağıdaki denklikleri çözünüz.

a. $4x \equiv 9 \mod 14$,

b. $4y \equiv 10 \mod 14$.

Çözüm.

a. $(4, 14) = 2$ ve $2 \nmid 9$ olduğundan $4x \equiv 9 \mod 14$ ün çözümü yoktur.

b. $4x \equiv 10 \mod 14 \Rightarrow 2x \equiv 5 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 5 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 4 \cdot 5 \equiv 6 \mod 7$ elde edilir.

Teorem 7 (Fermat Teoremi)**.** Her a tam sayısı ve p asal sayısı için $a^p \equiv a \mod p$ denkliği sağlanır. $(a, p) = 1$ ise $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ olur.

Örnek 4. 2^{2010} sayısının 23 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

Çözüm. Fermat Teoreminden $2^{22} \equiv 1 \mod 23$ olduğundan, $\left(2^{22}\right)^{91} \equiv 1 \mod 23$ ve buradan $2^{2002} \equiv 1 \mod 23$ elde edilir. Sonuç olarak $2^{2010} \equiv 2^{2002}2^{8} \equiv 1 \cdot 256 \equiv 3 \mod 23$ bulunur.

Euler φ Fonksiyonu: Her n pozitif tam sayısı için n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona Euler φ fonksiyonu denir.

Örnek 5. 10 dan küçük olup 10 ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayılar 1,3,7 ve 9 olduğundan $\varphi(10) = 4$ olur.

p bir asal sayı olduğunda, kendisinden küçük tüm pozitif tam sayılarla arasında asal olacağından $\varphi(p) = p - 1$ olduğu hemen görülür. Şimdide $\varphi(p^k)$ yı hesaplayalım. p^k den küçük olup p ye bölünebilen $\dfrac{p^k}{p} = p^{k-1}$ sayı olduğundan $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ olur.

Bu gözlemler aşağıdaki teoremin sonucu ile birleştirildiğinde her n tam sayısı için $\varphi(n)$ nin hesaplanması kolaylaşmaktadır.

Teorem 8. φ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur, yani $(a, b) = 1$ ise $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ dir.

n nin asal çarpanlarına ayrılmış hali, $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2})\cdots\varphi(p_r^{k_r}) \\
&= p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2^{k_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots p_r^{k_r}\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan $\varphi(n) = n\prod_{p_i|n}\left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$ olur.

Teorem 9 (Euler Teoremi)**.** $(a, n) = 1$ olmak üzere $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ olur.

Örnek 6. 3^{2005} sayısının onluk düzende yazılışının son 3 rakamı nedir?

Çözüm. $1000 = 2^3 5^3$ olduğundan $\varphi(1000) = 1000\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 400$ olur. Euler teoreminden $3^{400} \equiv 1 \mod 1000$ ve $3^{2000} \equiv 1 \mod 1000$ bulunur. $3^{2005} \equiv 3^{2000}3^{5} \equiv 1 \cdot 243 \equiv 243 \mod 1000$ olduğundan 3^{2005} in son 3 rakamı 243 olarak bulunur.

Teorem 10 (Wilson Teoremi)**.** Her p asal sayısı için $(p - 1)! \equiv -1 \mod p$ olur.

$n > 1$ olmak üzere $(a, n) = 1$ şartını sağlayan herhangi bir a tam sayısı için $a^d \equiv 1 \mod n$ şartını sağlayan en küçük pozitif d tam sayısına a nın mod n deki derecesi denir.

$(a,n)>1$ olursa $a^d \equiv 1 \mod n$ şartının sağlanmayacağı açıktır. $(a,n)=1$ olduğu zaman Euler teoreminden (Teorem 9) $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ olduğu için a nın derecesinin en fazla $\varphi(n)$ olduğu görülür.
x, $a^x \equiv 1 \mod n$ şartını sağlayan bir tam sayı olsun. Bu durumda bölme algoritmasından $x = sd + r$ ve $0 \leq r < d$ yazabiliriz. Yani,

$$a^x = a^{sd+r} = \left(a^d\right)^s a^r \equiv 1 \cdot a^r \mod n$$

olduğundan $a^r \equiv 1 \mod n$ olur. Ancak $r < d$ ve $a^r \equiv 1 \mod n$ olduğundan $r = 0$ olmalıdır. Buradan $x = sd$ elde edilir. Sonuç olarak $a^x \equiv 1 \mod n$ şartının sağlanması için $d \mid x$ olması gerektiği görülür. Bu sonuç kullanılarak $d \mid \varphi(n)$ elde edilir.

Örnek 7. 2 nin mod 17 deki derecesini bulunuz.

Çözüm. Bu sayıya d olsun. $d \mid \varphi(17)$ yani $d \mid 16$ olur.

$$2^1 \equiv 2 \mod 17, \quad 2^2 \equiv 4 \mod 17, \quad 2^4 \equiv 16 \mod 17, \quad 2^8 \equiv 1 \mod 17$$

olduğundan $d = 8$ bulunur.
$a^i \equiv a^j \mod n$ olsun. Buradan $a^{i-j} \equiv 1 \mod n$ ve dolayısıyla $d \mid (i-j)$ elde edilir. Yani $a^i \equiv a^j \mod n$ olması ancak ve ancak $d \mid (i-j)$ olması halinde mümkündür.

Teorem 11. a nın mod n deki derecesi d ve $s > 0$ olmak üzere, a^s nin mod n deki derecesi $\dfrac{d}{(s,d)}$ olur.

İspat. $m = (s,d)$ olsun. Bu durumda $s = s_1 m$, $d = d_1 m$ ve $(s_1, d_1) = 1$ olur. a^s nin mod n deki derecesi r ise

$$(a^s)^{d_1} = (a^{s_1 m})^{d/m} = (a^d)s_1 \equiv 1 \mod n$$

olduğundan $r \mid d_1$ elde edilir. $a^{sr} = (a^s)^r \equiv 1 \mod n$ olduğundan $d|sr$, yani $d_1 m \mid s_1 m r$ ve dolayısıyla $d_1 \mid s_1 r$ elde edilir. $(s_1, d_1) = 1$ olduğundan $d_1 \mid r$ bulunur. $r \mid d_1$ ve $d_1 \mid r$ olduğundan $r = d_1 = \dfrac{d}{m} = \dfrac{d}{(s,d)}$ sonucu elde edilir. □

3.2 Doğrusal Denklik Sistemi Çözümleri:

Aşağıdaki denklik sistemini çözmeye çalışalım:

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \mod n_1 \\ x &\equiv r_2 \mod n_2. \end{aligned}$$

İlk denkliğin çözümleri $x = r_1 + n_1 k$ şeklindeki sayılardır. Bunu ikinci denklikte yerine yazarsak $x = r_1 + n_1 k \equiv r_2 \mod n_2$ ve buradan $n_1 k \equiv r_2 - r_1 \mod n_2$ bulunur. $(n_1, n_2) =$

1 olduğu zaman n_1 in mod n_2 de tersi olduğunu biliyoruz. Bu durumda $k \equiv n_1^{-1}(r_2 - r_1)$ mod n_2 olur ve $x \equiv r_1 + n_1 k \mod n_1 n_2$ her iki denkliği sağlar.
Şimdi $(n_1, n_2) = 1$ olduğu zaman bu çözümün mod $n_1 n_2$ de tek olduğunu gösterelim. x_1 ve x_2 iki çözüm olsun. $x_1 \equiv x_2 \mod n_1$ ve $x_1 \equiv x_2 \mod n_2$ olduğundan $n_1 \mid (x_1 - x_2)$, $n_2 \mid (x_1 - x_2)$ ve $(n_1, n_2) = 1$ olduğundan $n_1 n_2 \mid (x_1 - x_2)$ bulunur. Yani $x_1 \equiv x_2 \mod n_1 n_2$ elde edilir.

Örnek 8. Aşağıdaki denklik sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \mod 14 \\ x &\equiv 7 \mod 9. \end{aligned}$$

Çözüm. $x = 14k + 4 \equiv 7 \mod 9$ olacağından $14k \equiv 3 \mod 9$ ve $k \equiv 14^{-1} \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6$ mod 9 bulunur. Buradan $k = 9t+6$ ve $x = 14(9t+6)+4 = 126t+88$ bulunur ve $14 \cdot 9 = 126$ olduğundan $x \equiv 88 \mod 126$ elde edilir.
Bu yöntem iki denklik sistemini çözmek için yeterlidir. Fakat denklik sayısı arttıkça bu yöntemi uygulamak zordur. k tane denklik sistemini çözmek için Çinli Kalan Teoremi'nden yararlanılır.

Teorem 12 (Çinli Kalan Teoremi)**.** $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ikişer ikişer aralarında asal sayılar ve $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \mod n_1 \\ x &\equiv r_2 \mod n_2 \\ &\vdots \\ x &\equiv r_k \mod n_k. \end{aligned}$$

denklik sisteminin $\mod n_1 n_2 \cdots n_k$ da tek çözümü vardır.

İspat. $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ olsun.
$1 \le i \le k$ için $\left(\frac{n}{n_i}, n_i\right) = 1$ olduğundan $\frac{n}{n_i} s_i \equiv r_i \mod n_i$ denklik sistemini sağlayan s_i vardır.
$x \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{n_i} s_i$ olsun.
$i \neq j$ için $n_i \mid \frac{n}{n_j}$ olduğundan $x \equiv \frac{n}{n_i} s_i \equiv r_i \mod n_i$ olur. Yani x tüm denklikleri sağlar.
Çözümün tek olduğunu göstermek için tümevarımı kullanacağız.

- $x \equiv r_1 \mod n_1$ denkliğinin tek çözümü vardır.
- İlk $k-1$ denklik sisteminin tek çözümü olduğunu kabul edelim.

- k denklik sisteminin tek çözümü olduğunu göstermek istiyoruz. x_1 ve x_2 iki çözüm olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x_2 \mod n_1 n_2 \cdots n_{k-1} \\ x_1 &\equiv x_2 \mod n_k \end{aligned}$$

olduğundan $n_1 n_2 \cdots n_{k-1} \mid (x_1 - x_2)$ ve $n_k \mid (x_1 - x_2)$ olur.
Yani $x_1 \equiv x_2 \mod n_1 n_2 \cdots n_k$ dır.

$\square$

Örnek 9. Aşağıdaki denklik sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 7 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10. \end{aligned}$$

Çözüm. $n = 7 \cdot 9 \cdot 10 = 630$, $\frac{n}{n_1} = 90$, $\frac{n}{n_2} = 70$ ve $\frac{n}{n_3} = 63$ olduğundan

$$\begin{aligned} 90s_1 \equiv 2 \mod 7 &\Rightarrow 6s_1 \equiv 2 \mod 7 \Rightarrow s_1 \equiv 6^{-1} \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 5 \mod 7 \\ 70s_2 \equiv 4 \mod 9 &\Rightarrow 7s_2 \equiv 4 \mod 9 \Rightarrow s_2 \equiv 7^{-1} \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 7 \mod 9 \\ 63s_3 \equiv 1 \mod 10 &\Rightarrow 3s_3 \equiv 1 \mod 10 \Rightarrow s_3 \equiv 3^{-1} \cdot 1 \equiv 7 \mod 10 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{n}{n_i} s_i = 90 \cdot 5 + 70 \cdot 7 + 63 \cdot 7 = 1381$ olur. Çözüm mod 630 da tek olduğundan $x = 1381 \equiv 121 \mod 630$ elde edilir.

3.3 Yüksek Dereceden Denklik Sistemi Çözümleri:

Önceki bölümlerde doğrusal denklikler ve denklik sistemlerinin çözüm yöntemleri üzerinde durduk. Şimdi yüksek dereceden denklik çözümü, yani $P(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom olmak üzere $P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğini çözeceğiz.
$P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğinin bir çözümü a ise $b \equiv a \mod n$ şartını sağlayan tüm b sayıları da bu denkliğin bir çözümüdür. Denkliği çözmek için Çinli Kalan Teoreminden yararlanacağız. n sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ olsun. Bu

durumda

$$\begin{aligned}
P(x) &\equiv 0 \mod p_1^{k_1} \\
P(x) &\equiv 0 \mod p_2^{k_2} \\
&\vdots \\
P(x) &\equiv 0 \mod p_r^{k_r}
\end{aligned}$$

denkliklerini ayrı ayrı çözersek Çin Kalan Teoremiyle tüm çözümleri bulabiliriz.

Örnek 10. $2x^2 + 7x + 5 \equiv 0 \mod 60$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan dekliği mod 4, mod 3 ve mod 5 de çözeceğiz.
$2x^2+7x+5 \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow 2x^2+3x+1 \equiv 0 \mod 4$ olur. Çözümü bulmak için $x = 0, 1, 2, 3$ değerlerini denememiz yeterlidir. $x \equiv 3 \mod 4$ denkliği sağlar. Benzer şekilde $x \equiv 2 \mod 3$ ve ($x \equiv 0 \mod 5$ veya $x \equiv 4 \mod 5$) elde edilir.
Dolayısıyla denkliğin iki çözümü vardır. Bu çözümleri bulmak için Çin Kalan Teoremini kullanalım.

$$\left.\begin{aligned}
x &\equiv 3 \mod 4 \\
x &\equiv 2 \mod 3 \\
x &\equiv 0 \mod 5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
3 \cdot 5s_1 &\equiv 3 \mod 4 \\
4 \cdot 5s_2 &\equiv 2 \mod 3 \\
4 \cdot 3s_3 &\equiv 0 \mod 5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
s_1 &\equiv 1 \mod 4 \\
s_2 &\equiv 1 \mod 3 \\
s_3 &\equiv 0 \mod 5
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x = \sum_{i=1}^{3} \frac{n}{n_i} s_i = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 0 \equiv 35 \mod 60$ olur.
Diğer çözümde benzer yöntemle elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}
x &\equiv 3 \mod 4 \\
x &\equiv 2 \mod 3 \\
x &\equiv 4 \mod 5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
3 \cdot 5s_1 &\equiv 3 \mod 4 \\
4 \cdot 5s_2 &\equiv 2 \mod 3 \\
4 \cdot 3s_3 &\equiv 4 \mod 5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
s_1 &\equiv 1 \mod 4 \\
s_2 &\equiv 1 \mod 3 \\
s_3 &\equiv 2 \mod 5.
\end{aligned}$$

Buradan $x = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 \equiv 59 \mod 60$ olur.

3.3.1 p^2 Modundaki Denklik Çözümleri:

$P(x) \equiv 0 \mod n$ denkliğini çözmek için öncelikli olarak $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğini çözmemiz gerektiğini biliyoruz. Bunun için ilk olarak $P(x) \equiv 0 \mod p^2$ durumunu inceleyeceğiz. $P(x) \equiv 0 \mod p$ denkliğini çözmenin sistematik bir yolu yoktur. $P(x)$ çarpanlarına ayrılmıyorsa genellikle $0, 1, \ldots, p-1$ değerlerinin hepsini denemek gerekir.
$P(x) \equiv 0 \mod p$ sisteminin çözümlerinden bir tanesi x_0 olsun. $x = py+x_0$ değerini $P(x) \equiv 0 \mod p^2$ denkliğinde yerine koyduğumuzda p^2 ye bölünebilen katsayılar gideceğinden $ay + b \equiv 0 \mod p$ şeklinde bir denklik elde ederiz.

Örnek 11. $x^3+3x^2+3 \equiv 0 \mod 25$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. Önce $x^3+3x^2+3 \equiv 0 \mod 5$ denkliğini çözelim. $x = 0,1,\ldots,4$ için denkliği sağlayan tek değer $x \equiv 4 \mod 5$ olur. Bu durumda $x = 5y+4$ dersek

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+3 &= (5y+4)^3+3(5y+4)^2+3 \\ &= 125y^3+300y^2+240y+64+75y^2+120y+48+3 \\ &\equiv 360y+115 \equiv 0 \mod 25 \end{aligned}$$

olur ve buradan $10y \equiv 10 \mod 25 \Rightarrow 2y \equiv 2 \mod 5 \Rightarrow y \equiv 1 \mod 5$ elde edilir. $x = 5y+4$ kabulumuzden $x \equiv 9 \mod 25$ değerinin denkliğin tek çözümü olduğu bulunur.

3.3.2 p^k Modundaki Denklik Çözümleri:

Bu bölümde $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğinin çözümleri bilindiği zaman $P(x) \equiv 0 \mod p^{k+1}$ denkliğini çözeceğiz.

Teorem 13. p bir asal sayı ve $P(x)$, katsayıları tam sayı olan bir polinom olmak üzere $P(x) \equiv 0 \mod p^k$ denkliğinin bir çözümü x_k olsun.

$$P'(x_k)y + \frac{P(x_k)}{p^k} \equiv 0 \mod p$$

denkliğinin her y çözümü için $P(x) \equiv 0 \mod p^{k+1}$ denkliğinin $x_{k+1} = x_k + p^k y$ olacak şekilde bir çözümü vardır.

Teoremde geçen $P'(x)$ polinomu, P(x) polinomunun türevidir ve $P(x) = a_r x_r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ için $P'(x) = r a_r x_{r-1} + (r-1)a_{r-1}x^{r-2} + \cdots + a_1$ olur.

Örnek 12. $x^3+2x^2+2 \equiv 0 \mod 27$ denkliğini çözünüz.

Çözüm. İlk olarak $x^3+2x^2+2 \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözelim. $x=0$, $x=1$ ve $x=2$ değerlerini denersek $x \equiv 2 \mod 3$ ün tek çözüm olduğunu görürüz.
$P(x) = x^3+2x^2+2$ olduğundan $P'(x) = 3x^2+4x$ olur. $x_1 = 2$, $P(x) \equiv 0 \mod 3$ denkliğinin bir çözümü olduğundan $P'(2)y + \frac{P(2)}{3} \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözersek $20y + 18/3 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow 2y \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow y \equiv 0 \mod 3$ olur. Buradan $x_2 = x_1+3y = 2+0 \equiv 2 \mod 3^2$ elde edilir.
Benzer şekilde $P'(x_2)y + \frac{P(x_2)}{3^2} \equiv 0 \mod 3$ denkliğini çözersek $20y+18/9 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow 2y+2 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow y \equiv 2 \mod 3$ olur. Buradan $x_3 = x_2+3^2y = 20 \mod 3^3$ denkliğin tek çözümü olarak bulunur.
NOT. Teorem 13 te $P'(x_k)y + \frac{P(x_k)}{p^k} \equiv 0 \mod p$ denkliğinin $0 \le y \le p-1$ şartını sağlayan 0, 1 veya p tane çözümü vardır.

4 Diofant Denklemler

4.1 Pisagor Üçlüleri

Bir dik üçgenin kenar uzunlukları olan tam sayılara Pisagor üçlüleri denir.
Hipotenüs uzunluğuna z, diğer kenar uzunluklarına x ve y dersek $x^2 + y^2 = z^2$ şartını sağlayan pozitif tam sayılar Pisagor üçlüleridir. Şimdi $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin tüm çözümlerini bulmaya çalışalım.
$(x, y, z) = d$ olsun. Bu durumda $x_1 = \frac{x}{d}$, $y_1 = \frac{y}{d}$, $z_1 = \frac{z}{d}$ yzarsak $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ elde ederiz. Ayrıca herhangi iki terimin ortak böleni varsa bu bölen üçüncü terimide bulmak zorundadır. Yani $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin $(x, y, z) = 1$ şeklindeki çözümlerini bulursak, diğer bütün çözümleri bu çözümlerden elde edebiliriz.
x ve y sayıları tek sayı olsun. Bu durumda $x^2 + y^2 = z^2 \equiv 2 \mod 4$ olur. Fakat bir tam kare mod 4 de 2 olamayacağından çelişki elde edilir. Yani x ve y den birisi tek diğeri çifttir. Genelliği bozmadan x tek, y çift olsun. $y = 2a$ dersek $y^2 = 4a^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ olur ve buradan $a^2 = \dfrac{z-x}{2} \cdot \dfrac{z+x}{2}$ elde edilir. $\left(\dfrac{z-x}{2}, \dfrac{z+x}{2}\right) = d$ olsun.
$d \mid \left(\dfrac{z-x}{2} + \dfrac{z+x}{2}\right)$ ve $d \mid \left(\dfrac{z-x}{2} - \dfrac{z+x}{2}\right)$ olduğundan $d \mid z$ ve $d \mid x$ bulunur. Yani $d = 1$ dir.
Buradan $\dfrac{z-x}{2} = t^2$, $\dfrac{z+x}{2} = s^2$ elde edilir. Bu denklemleri de çözersek

$$\left.\begin{array}{l} z + x = 2s^2 \\ z - x = 2t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z = 2s^2 + 2t^2 \Rightarrow z = s^2 + t^2 \Rightarrow x = s^2 - t^2$$

ve buradan $y = 2a = 2st$ elde edilir. Sonuç olarak $x^2 + y^2 = z^2$ şartını sağlayan bütün pozitif tam sayılar

$$(x, y, z) = \big(k(s^2 - t^2), 2kst, k(s^2 + t^2)\big) \quad \text{veya} \quad (x, y, z) = \big(2kst, k(s^2 - t^2), k(s^2 + t^2)\big)$$

şeklindedir.

4.2 Doğrusal Diofant Denklemler

$ax+by = c$ şeklindeki doğrusal diofant denklemler Öklid algoritması yardımıyla çözülebilir.

Teorem 14. *a ve b en büyük ortak bölenleri d olan iki tam sayı olsun. $ax + by = c$ denkleminin tam sayılarda çözümünün olması için gerek ve yeter şart $d \mid c$ olmasıdır. Ayrıca (x_0, y_0) denklemin bir çözümü ise genel çözüm $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere*

$$x = x_0 + \frac{kb}{d}, \quad y = y_0 - \frac{ka}{d}$$

olarak elde edilir.

Örnek 13. Ayşe bankadan bir miktar para alıyor, ama veznedar parayı verirken kuruşlarla liraları karıştırıyor. Ayşe daha sonra 50 kuruşa gazete alıyor ve kalan parasının, bankadan alması gereken paranın 3 katı olduğunu görüyor. Ayşe'nin bankadan alması gereken para ne kadardı?

Çözüm. Liraların sayısına x, kuruşların sayısına y diyelim. Burada x ve y nin 100 den küçük olduğunu varsayabiliriz. Aksi halde kuruşların sayısının 100 den büyük olması durumu söz konusu olur. (3 lira 105 kuruş gibi) Veznedarın vermesi gereken para $100x+y$ kuruş, verdiği para ise $100y+x$ kuruştur. Ayşe 50 kuruşa gazete aldıktan sonra kalan parası bankadan alması gereken paranın 3 katı ise $100y + x - 50 = 3(100x + y)$ dir. Buradan da $97y - 299x = 50$ elde edilir. 299 ve 97 aralarında asal oldukları için $97a + 299b = 1$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. Öklid algoritmasından $299 = 3 \cdot 97 + 8$ ve $97 = 12 \cdot 8 + 1$ olduğundan,

$$1 = 97 - 8 \cdot 12 = 97 - (299 - 3 \cdot 97) \cdot 12 = 37 \cdot 97 - 12 \cdot 299$$

elde edilir. Buradan $a = 37$, $b = 12$ bulunur. $97y - 299x = 50$ denkleminin çözümü de $y = 50 \cdot 37 = 1850$ ve $x = 50 \cdot 12 = 600$ dür. k bir tam sayı olmak üzere bu denklemin bütün çözümlerinin $y = 1850 + 299k$, $x = 600 + 97k$ şeklinde olduğu gösterilebilir. $0 \leq x, y \leq 100$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x, y değerleri için $k = -6$ dır. Bu durumda $y = 56$ ve $x = 18$ bulunur. Yani Ayşe'nin bankadan alması gereken para 18 lira 56 kuruştur.

4.3 $xy + Ax + By + C = 0$ Şeklindeki Denklemler

Bu tür denklemler çarpanlara ayırma yöntemi yardımıyla çözülebilir. $xy + Ax + By + C = 0$ denklemi $(x + B)(y + A) = AB - C$ denklemine dönüştürülür. Bu durumda $AB - C$ nin tüm çarpanları bir (x, y) çözüm ikilisi belirler.

Örnek 14. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm. x ve y sıfırdan farklı olmak üzere verilen denklem $2x + y = xy$ veya $(x-1)(y-2) = 2$ olarak yazılır. Bu denklemi çözmek için 2 nin tam sayı bölenlerini incelemek yeterlidir. Dolayısıyla dört durum vardır.

i. $x - 1 = 2,\ y - 2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (3, 3)$ bir çözümdür.

ii. $x - 1 = 1,\ y - 2 = 2 \Rightarrow (x, y) = (2, 4)$ bir çözümdür.

iii. $x - 1 = -2,\ y - 2 = -1 \Rightarrow (x, y) = (-1, 1)$ bir çözümdür.

vi. $x - 1 = -2,\ y - 2 = -2 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ bir çözüm olamaz.

Denklemin çözümleri $x, y \in \{(3, 3), (2, 4), (-1, 1)\}$ olur.

SAYILAR TEORİSİ - PROBLEMLER

1. $(p+1)^q$ sayısının hangi p ve q asal sayıları için bir tam kare olduğunu bulunuz.

2. $n+2n+3n+\ldots+9n$ toplamının bütün basamakları aynı rakamdan oluşan bir sayıya eşit olmasını sağlayan en küçük pozitif n tam sayısını bulunuz.

3. Her $n>1$ tam sayısı için $\sqrt{11\ldots144\ldots4}$ (n tane 1 ve $2n$ tane 4) sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

4. a, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, m tek sayı, $a>1$ olsun. Bu durumda a^m-1 ve a^n+1 sayılarının en büyük ortak böleni nedir?

5. n pozitif çift bir tam sayı olmak üzere a ve b aralarında asal pozitif tam sayılardır. $(a+b)|(a^n+b^n)$ koşulunu sağlayan tüm a ve b sayılarını bulunuz.

6. $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

7. $T=1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{20}$ toplamını hesaplayınız.

8. n, 6 dan büyük bir tam sayı olsun. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğuna göre $n^2(n^2+16)$ nın 720 ile bölünebildiğini gösteriniz. Eğer $n^2(n^2+16)$ 720 ile bölünebiliyorsa $n-1$ ve $n+1$ sayılarından ikisi birden asal olmak zorunda mıdır?

9. $p, 4p^2+1$ ve $6p^2+1$ asal sayılar ise p nin alabileceği değerleri bulunuz.

10. 1978 yılı ilk iki basamağının son iki basamağına eklenince ortadaki iki basamağını vermesi (19+78=97) bakımından ilginç bir yıldı. 1978 den bir önceki ve bir sonraki ilginç yılları bulunuz.

11. Hiç bir pozitif n tam sayı için $n(n+1)(n+2)$ nin bir tam kare olamayacağını ispatlayınız.

12. $ab = obeb(a,b)+okek(a,b)$ denklemini sağlayan tüm (a,b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

13. Ard arda yazılan $1,2,\ldots,10$ sayılarının aralarına $+$ ve $-$ işaretleri nasıl konulursa konulsun toplamın hiçbir zaman 0 olamayacağını ispatlayınız.

14. n^2+23 sayısının sonsuz farklı n tam sayısı için 24 ile tam bölündüğünü ispatlayınız.

15. p nin bir asal sayı olması durumunda $8p-1$ ve $8p+1$ sayılarından en az bir tanesinin bileşik sayı olacağını gösteriniz.

16. Her n doğal sayısı için $n^5 - 5n^3 + 4n$ sayısının 120 nin bir tam katı olacağını ispatlayınız.

17. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99!$ toplamını hesaplayınız.

18. $\{1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden kalan tüm elemanların çarpımı bir tam kare olacak şekilde en az kaç sayı silebiliriz?

19. Birinci ve ikinci terimleri 1 olan ve her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edilen dizinin (Fibonacci dizisi) her beşinci teriminin 5 ile bölünebildiğini gösteriniz.

20. 18 ile 57 arasındaki 40 tam sayı yan yana yazılarak 80 basamaklı bir sayı $(1819\ldots57)$ elde edilmiştir. 3^k nın, bu sayıyı böldüğü en büyük k tam sayısını bulunuz.

21. Herhangi üç tek doğal sayı için, dördünün karelerinin toplamı yine bir tam kare olacak şekilde dördüncü bir tek sayının bulunabileceğini gösteriniz.

22. Verilen $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, ve $Q(x) = x^3 - x + 3$ polinomları için $Q(a)$ nın $P(a)$ yı bölmesini sağlayacak bir a tam sayısının olmadığını gösteriniz.

23. İlk terimi 10 olan bir dizide her çift terimden bir sonraki terim o terimin yarısı, her tek terimden bir sonraki terim de bir önceki terimin 2 katının 2 fazlasıdır. Dizinin 2008. terimini bulunuz.

24. Bir okuldaki birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinden oluşan bir grubun %55'i erkek öğrencidir. Ayrıca bu gruptaki erkek birinci sınıf öğrencisi sayısının erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranı, gruptaki birinci sınıf öğrencisi sayısının ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranına eşittir. Bu durumda erkek birinci sınıf öğrencilerin sayısının bayan birinci sınıf öğrencilerinin sayısına oranını bulunuz.

25. Verilen herhangi iki a ve b tam sayıları için $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ olacak şekilde x ve y tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz.

26. Her pozitif n tam sayısı için, $u(n)$ ile n yi aşmayan en büyük asal sayı, $v(n)$ ile de n den büyük en küçük asal sayı gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$

olduğunu gösteriniz.

27. Her n pozitif tam sayısı için, $\binom{2n}{n}$ sayısının, $n+1$ ve $4n-2$ ile bölünebildiğini gösteriniz.

28. $n = 0, 1, \ldots, 2010$ olmak üzere, $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

29. Birbirinden ve sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için ab iki basamaklı sayısını bölen c, bc iki basamaklı sayısını bölen a ve ac iki basamaklı sayısını bölen b sayıları bulunabilir mi?

30. $\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \cdots \frac{3x+49}{48}$, kesirlerinin her birinin sadeleşmiş olması, yani payları ve paydalarının aralarında asal olmasını sağlayan en küçük x pozitif tam sayısını bulunuz.

31. Issız bir adaya düşen beş adam bir miktar hindistan cevizi toplarlar. Adamlardan her birisi sırayla hindistan cevizlerinin başında nöbet tutacaktır. Her adam nöbeti sırasında şu işlemleri gerçekleştirir:

   - Önce hindistan cevizlerini 5 eşit gruba ayırır.
   - Her defasında 1 hindistan cevizi artar ve artan hindistan cevizini bir maymuna verir.
   - Bir hindistan cevizi grubunu kendisi için saklayıp geri kalan hindistan cevizlerini tekrar tek bir grup haline getirir.

   Bu durumda başlangıçta en az kaç hindistan cevizi vardır?

32. n bir tam sayı olmak üzere, $n+3$ ve n^2+3 ün ikisi birden bir tam küp olabilirler mi?

33. Ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamının bir tam sayının birden büyük bir kuvveti olamayacağını gösteriniz. Yani, $(n+1)^2 + \cdots + (n+9999)^2 = m^r$ ifadesini sağlayan ve $r > 1$ olan n, m, r tam sayılarının olamayacağını gösteriniz.

34. $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ denklemini sağlayan bütün (a, b) tam sayı ikililerini bulunuz.

35. $|3^a - 2^b| = 1$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

36. On tabanında $(abcd)_{10}$, yedi tabanında ise $(dcba)_7$ olarak ifade edilen bütün tam sayıları bulunuz.

37.
$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1997 \cdot 1998}$$

ve

$$B = \frac{1}{1000 \cdot 1998} + \frac{1}{1001 \cdot 1997} + \dots + \frac{1}{1998 \cdot 1000}$$

olmak üzere, $\frac{A}{B}$ sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

38. 2^a sayısının basamakları uygun şekilde yer değiştirildiğinde 2 nin başka bir kuvveti elde edilmesini sağlayan bir a tam sayısı var mıdır?

39. Hipotenüs uzunluğu $\sqrt{2006}$ ve dik kenarları tam sayı olan dik üçgen var mıdır?

40. Bir bilgisayar, $n = 1, 2, 3, \dots$ için $(n+1)2^n$ ifadesinin değerlerini vermektedir. En fazla kaç tane tam kare değer arka arkaya gelir?

41. Elimizde 1 Kr, 5 Kr, 10 Kr, 25 Kr, 50 Kr ve 1 TL lik madeni paraların her birinden n tane bulunmaktadır. Bu paralardan seçilen n tanesinin toplamının 1 TL olmasının mümkün olamayacağı en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

42. n pozitif bir tam sayı ve p, $n|(p-1)$, $p|n^3-1$ şartlarını sağlayan bir asal sayı ise $4p-3$ ün bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

43. Her n doğal sayısı için $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169 un bir tam katı olacağını ispatlayınız.

44. **a)** x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2 + x$ ve $x^3 + 2x$ rasyonel ise x in rasyonel sayı olduğunu gösteriniz.
b) $x^2 + x$ ve $x^3 - 2x$ rasyonel sayılarken irrasyonel bir x sayısının bulunabileceğini gösteriniz.

45. a ve b, $\left(\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}\right)$ toplamını tam sayı yapan iki doğal sayıdır. a ve b'nin ortak bölenlerinin en büyüğünün $\sqrt{a+b}$ den büyük olmadığını gösteriniz.

46. $m^n - n^m = 3$ eşitliğini sağlayan bütün (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

47. a, b pozitif tam sayıları için $a + 77b$ nin 79 ile, $a + 79b$ nin de 77 ile bölünebildiği biliniyor. Buna göre $a + b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

48. Bir grup çocuk bir torbadaki cevizleri paylaşırlar. Birinci çocuk önce bir ceviz ve sonra da geride kalan cevizlerin onda birini; ikinci çocuk iki ceviz ve geriye kalanların onda birini; üçüncü çocuk da üç ceviz ve geriye kalanların onda birini alır. İşlem bu şekilde sürer ve son çocuk geriye kalan cevizlerin tümünü alır. Sonuçta tüm çocukların aldığı ceviz sayısının eşit olduğu görülür. Çocukların ve cevizlerin sayısını bulunuz.

49. 7 den büyük her tam sayının, her biri 1 den büyük ve aralarında asal iki tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

50. $x + y - xy = 43$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı çiftlerinin sayısını bulunuz.

51. $n + k^2$ nin en az n tane pozitif k tam sayısı için tam kare olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunamayacağını gösteriniz.

52. a, b, c, d tam sayıları için $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ denklemini sağlayan c ve d tam sayılarının ancak ve ancak $a \equiv b(\text{mod}2)$ olması durumunda bulunabileceğini gösteriniz.

53. A ve B iki pozitif tam sayı olmak üzere, A tam sayısının birinci ve üçüncü basamakları yer değiştirildiğinde B tam sayısı elde edilmektedir. A'nın B'ye bölümünden kalan, A'nın basamakları toplamının yedi katı, bölüm ise 3 olduğuna göre A ve B sayılarını bulunuz.

54. 100 kağıdın iki yüzü tek ve çift olarak isimlendirilmiştir. Her kağıdın tek yüzüne tek, çift yüzüne çift olmak üzere iki ardışık tam sayı yazılmıştır. Ayrıca bu kağıtlarda 1'den 200'e kadar olan bütün tam sayılar kullanılmıştır. Bir A öğrencisi rastgele 21 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 913 buluyor. Bir B öğrencisi ise geri kalan kağıtlardan rastgele 20 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 2400 buluyor. Bu durumda
a)A nın toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.
a)Eğer A nın doğru toplamı 903 ise, B nin toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.

55. $p^2 + 11$ sayısının 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olduğu tüm p asal sayılarını bulunuz.

56. İki ardışık sayının küplerinin farkı bir n tam sayısının karesi ise n nin iki ardışık sayının kareleri toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. (Mesela, $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$ ve $13 = 2^2 + 3^2$ dir.)

57. $n \geq 1$ olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ olan ve $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}$ koşulunu sağlasın.
a) Dizinin her teriminin bir pozitif tam sayı olduğunu gösteriniz.
b) $2a_na_{n+1} + 1$ sayısının her $n \geq 1$ için bir tam kare olduğunu gösteriniz.

58. $x + y$ ve xy birer pozitif tam sayı ve $x + y = xy$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y) irrasyonel sayı çifti bulunabileceğini gösteriniz.

59. $(a_n)_{n\in N}$ dizisi şu şekilde verilmiş olsun

- $a_1 = 1$
- $a_n = \frac{4n-2}{n}a_{n-1}$, $n \geq 2$

Bu dizinin bütün terimlerinin pozitif tam sayı olduğunu ispatlayınız.

60. Üç öğrenci tahtaya yan yana, üç tane iki basamaklı tam kare yazıyor. Sonuçta oluşan altı basamaklı sayı da bir tam kare oluyorsa tahtaya yazılan sayı kaç olabilir?

61. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan, negatif olmayan bütün a, b, c, d tam sayılarını bulunuz.

62. $xy + yz + zx - xyz = 2$ denklemini sağlayan bütün (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

63. $\frac{2^{58}+1}{5}$ sayısının asal olup olmadığını inceleyiniz.

64. $x + y + z = xyzt$ koşulunu sağlayan bütün pozitif x, y, z, t tam sayılarını bulunuz.

65. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sayılarının hepsi sadece bir kere kullanılarak bir x sayısı oluşturuluyor. x in basamaklarındaki rakamların yerleri değiştirilerek bir y sayısı elde ediliyor. y nin x i bölmediğini gösteriniz.

66. **a)** Her k tam sayısı için, $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ in üç tam karenin toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.
b) n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $(2k+1)^3 - 2$ sayısının $3n - 1$ tane 1 den büyük tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

67. Genel terimi $n^3 - (2n+1)^2$ olan (a_n) dizisinde 2006'ya bölünebilen bir terim var mıdır?

68. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını gösteriniz.
a) $n \geq 3$ olacak şekilde bütün n tam sayıları için, herhangi ikisinin çarpımı geri kalan $(n-2)$ tam sayının toplamıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.
b) $n \geq 3$ olacak şekilde, bazı n tam sayıları için, herhangi $(n-2)$ tanesinin toplamı geriye kalan iki tam sayının çarpımıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

69. $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ olsun. $n > 1$ için, H_n in bir tam sayı olamayacağını gösteriniz.

70. x tam sayı olmayan, pozitif bir rasyonel sayı ise x^x in rasyonel olmadığını gösteriniz.

71. m bileşik bir tam sayı olmak üzere, a, b, c, d pozitif tam sayıları için ab ve cd, m sayısının iki farklı çarpanlarına ayrılmış hali olsun ($m = ab = cd$). Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.

72. a, b ve c tam sayılar olmak üzere, $c^2+1=(a^2-1)(b^2-1)$ denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

73. A kümesi 1 tam sayısını ve en az bir pozitif tam sayıyı daha içeren bir küme olsun. A kümesinden alınan her m ve n tam sayıları için $\frac{m+1}{(m+1,n+1)}$ tam sayısının da kümenin bir elemanı olduğu biliniyor. Bu durumda A kümesinin bütün pozitif tam sayıları içerdiğini gösteriniz.

74. Herhangi bir pozitif n tam sayısı için $n!+1$ ve $(n+1)!$ in en büyük ortak bölenlerini bulunuz.

75. $n|(2^n-1)$ şartını sağlayan bütün pozitif n tam sayılarını bulunuz.

76. a^4+4b^4 değerini asal sayı yapan bütün a, b pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

77. n bir tam sayı olmak üzere, 2^n+3^n bir rasyonel sayının karesi olabilir mi?

78. $z^2=(x^2+1)(y^2-1)+n$ denklemini:
a) $n=2006$
b) $n=2007$
durumlarında sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri var mıdır?

79. $a_0=3$ ve $n\geq 1$ için $a_n=2+a_0a_1\ldots a_{n-1}$ olarak tanımlanmış (a_n) dizisi için
a) Dizinin herhangi iki elemanının aralarında asal olduklarını ispatlayınız.
a) a_{2007} yi bulunuz.

80. p bir asal sayı olmak üzere $7p+3^p-4$ tam sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

81. $p.q$ nun $(5^p-2^p)(5^q-2^q)$ yu böldüğü bütün p, q asal sayılarını bulunuz.

82. A kümesi,

- $a\in A$ ise a nın bütün pozitif bölenleri A kümesinin elemanıdır,
- a,$b\in A$ ve $1<a<b$ ise $1+ab\in A$ dır,

özelliklerini sağlayan pozitif tam sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesinin en az 3 elemanı varsa A=$\mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.

83. $x^2+y^2+z^2+t^2=2^{2004}$ denkleminin, tam sayılar kümesinde $0\leq x\leq y\leq z\leq t$ koşuluna uyan tam olarak iki çözümü olduğunu ispatlayınız.

84. En az iki eleman içeren ve $a,b\in A$, $a>b$ ise $\frac{okek(a,b)}{(a-b)}\in A$ koşulunu sağlayan negatif olmayan sayılar kümesi A yı düşünelim. A nın en fazla iki eleman içerebileceğini gösteriniz.

85. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n nin basamakları toplamını $s(n)$ ile gösterelim. $s(n)$ nin n den farklı, n yi bölen en büyük tam sayıya eşit olduğu bütün n değerlerini bulunuz.

86. P katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun ve $P(5) = 2005$ denklemini sağlasın. Bu durumda $P(2005)$ sayısının bir tam sayının karesi olması mümkün müdür?

87. a bir tam sayı olsun. $x^2 < 3$ koşulunu sağlayan herhangi bir x reel sayısı için, $\sqrt{3-x^2}$ ve $\sqrt[3]{a-x^3}$ sayılarından en az birinin irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.

88. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

89. $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ ifadesini rasyonel yapan n tam sayılarını bulunuz.

90. Negatif olmayan hiç bir n tam sayısı için $a_n = 2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ ifadesinin bir tam küp olamayacağını kanıtlayınız.

91. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$$

sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

92. $a_n = \left[n\sqrt{2}\right] + \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan dizinin sonsuz tane tek ve sonsuz tane çift sayı içerdiğini gösteriniz.

93. x ve y sayıları 5'ten büyük asal çarpanı olmayan pozitif tam sayılar olmak üzere, $k \geq 0$ olan bir k tam sayısı için $x^2 - y^2 = 2^k$ denklemini sağlayan bütün x, y çiftlerini bulunuz.

94. Binler basamağı aynı olan ve dört tanesi, beşinin toplamını bölen dört basamaklı birbirinden farklı tam sayı beşlilerini bulunuz.

95. $n^2 + 3^n$ sayısını tam kare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz.

96. $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

97. Birler basamağı başa alındığında (örnek: $1234 \to 4123$) elde edilen sayıyı kalansız bölen, en az iki basamaklı ve rakamlarının hepsi birbirinin aynısı olmayan en küçük sayıyı bulunuz. (Bahsi geçen sayılar onluk sisteme göre yazılmış ve başında 0 olmayan sayılardır.)

98. $(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) = y^{2^x}$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz.

99. 2^{2004} ün 2004 ile bölümünden kalanı bulunuz.

100. $n|(p-1)$ ve $p|(n^6-1)$ olmak üzere n bir pozitif tam sayı, p ise bir asal sayı olsun. Bu durumda $p-n$ ya da $p+n$ tam sayılarından en az birinin bir tam kare olduğunu gösteriniz.

101. m^2-4n ve n^2-4m sayılarının tam kare olmasını sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

102. a, b, c, d pozitif tam sayılar olmak üzere, her pozitif rasyonel sayının

$$\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

103. a ve b bütün n pozitif tam sayıları için $(a^n+n)|(b^n+n)$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar olsunlar. Bu durumda $a=b$ olduğunu ispatlayınız.

104. Bir tam kare sayının son n basamağı 0 dan farklı ve birbirinin aynısıysa bu tam kare sayı n uzunluğundadır denir. Bir tam kare için mümkün olan en büyük uzunluğu bulunuz. Bu uzunluğa sahip tüm tam kare sayıları bulunuz.

105. a, b, n ve m, $n>1$ olacak şekilde, pozitif tam sayılardır. $a^n+b^n=2^m$ ise $a=b$ olduğunun gösteriniz.

106. Herhangi iki n ve k pozitif tam sayıları için,

$$n = \pm\binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}$$

olacak şekilde $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$ pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

107. $p^m q^n = (p+q)^2+1$ eşitliğini sağlayan tüm m, n, p, q pozitif tam sayılarını bulunuz.

108. a ve b 2'den büyük tam sayılar olsun. $n_1=a$, $n_k=b$ ve $i=1,2,\ldots,k-1$ için $(n_i+n_{i+1})|n_i n_{i+1}$ özelliklerini sağlayan bir k tam sayısı ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tam sayı dizisi olduğunu gösteriniz.

109. Aşağıdaki özellikleri sağlayan N pozitif tam sayılarını bulunuz.

    (a) N sayısı tam olarak 16 bölene sahip olacak $(1=d_1<d_2<\ldots<d_{16}=N)$.

    (b) d_5. bölen, yani d_{d_5}, $(d_2+d_4)d_6$'ya eşit olacak.

110. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n'in basamaklarının tersten yazılışıyla elde edilen sayıyı $r(n)$ ile gösterelim. (Örneğin $r(2006) = 6002$). Herhangi a ve b pozitif tam sayıları için $4a^2+r(b)$ ve $4b^2+r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olamayacağını ispatlayınız.

111. $x^3+y^3+z^2 = t^4$ denklemini sağlayan ve ortak bölenleri 1 den büyük olmayan sonsuz tane pozitif tam sayı dörtlüsü (x, y, z, t) olduğunu gösteriniz.

112. $n > 1$ olmak üzere x, y ve n pozitif tam sayılar olsun. $x^n - y^n = 2^{100}$ denkleminin kaç tane çözümü olduğunu bulunuz?

113. Her biri 0 dan farklı x, y, z ve t gerçel sayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} x+y+z &= t \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{1}{t} \\ x^3+y^3+z^3 &= 1000^3 \end{aligned}$$

$x+y+z+t$ toplamını bulunuz.

114. $y^2 = x^3 - 432$ denklemini sağlayan tüm x, y tam sayılarını bulunuz.

115. $x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün olmadığını gösteriniz.

116. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere negatif olmayan x ve y tam sayıları için $ax + by$ şeklindeki negatif olmayan sayılara **"güzel"** diyelim. s tam sayısının t ile bölümünden kalan s_t olmak üzere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu $f(n) = n - n_a - n_b$ olarak tanımlayalım. Bu durumda n tam sayısının güzel olabilmesi için gerekli ve yeterli şartın $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ dizisinin negatif olmayan sayılardan meydana gelmesi olduğunu gösteriniz.

117. $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ denklemini sağlayacak x_n, y_n tek, doğal sayı ikilisi olduğunu gösteriniz.

118. 50! kaç değişik şekilde iki veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir?

119. $4^x+4^y+4^z$ ifadesini bir tam kare yapan biribirinden farklı bütün x, y, z tam sayılarını bulunuz.

SAYILAR TEORİSİ - ÇÖZÜMLER

1. $(p+1)^q$ sayısının hangi p ve q asal sayıları için bir tam kare olduğunu bulunuz.

   Çözüm. $q = 2$ ise bütün p değerleri için $(p+1)^2$ bir tam kare olacaktır. $q > 2$ ise, q bir tek sayı olduğundan q'yu k pozitif bir tam sayı olmak üzere, $q = 2k+1$ şeklinde yazabiliriz.
   $$(p+1)^q = (p+1)^{2k+1} = (p+1)(p+1)^{2k}$$
   olduğundan $(p+1)^q$ bir tam kare ise, $(p+1)$ de bir tam kare olmak zorundadır. $(p+1) = n^2$ diyelim. O halde $p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ olur. Fakat p asal olduğu için $(n-1)$ ya da $(n+1)$ den birinin 1, diğerinin p olması gerekir. Bu durumda $n = 2$, dolayısıyla da $p = 3$ tür. $p = 3$ ise 4^q her q değeri için bir tam karedir.
   Sonuç olarak, $q = 2$ ise her p için, $q > 2$ ise $p = 3$ için $(p+1)^q$ bir tam karedir.

2. $n+2n+3n+\ldots+9n$ toplamının bütün basamakları aynı rakamdan oluşan bir sayıya eşit olmasını sağlayan en küçük pozitif n tam sayısını bulunuz.

   Çözüm. $n + 2n + 3n + \ldots + 9n = 45n$ toplamını S ile gösterelim. S beşin katı olduğuna ve S nin bütün basamakları aynı sayı olduğuna göre hepsi beşe eşit olmak zorundadır. Öbür taraftan S dokuza da bölündüğüne göre, basamakların toplamı da dokuza bölünmelidir. Bir başka deyişle S yi k basamaklı kabul edersek $5k$ dokuza bölünmelidir. Soruda en küçük n pozitif tam sayısı sorulduğuna göre $k = 9$ ve $S = 555555555$ olmalıdır. Buradan da $n = \frac{555555555}{45} = 12345679$ bulunur.

3. Her $n > 1$ tam sayısı için $\sqrt{11\ldots144\ldots4}$ (n tane 1 ve $2n$ tane 4) sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

   Çözüm. $11\ldots144\ldots4$ sayısının tam kare olamayacağını göstermek istiyoruz. n basamaklı $11\ldots1$ sayısını a ile gösterirsek,
   $$\begin{aligned} 11\ldots144\ldots4 &= \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{2n} + \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{44\ldots4}_{n} \\ &= a\cdot 10^{2n} + 4a\cdot 10^n + 4a = a(10^n+2)^2 \end{aligned}$$
   yazabiliriz. $a = 11\ldots1$ sayısı 4 ile bölündüğünde 3 kalanını vereceğinden $(n > 1)$, a bir tam kare değildir. Bu durumda $a(10^n+2)^2 = 11\ldots144\ldots4$ sayısı da bir tam kare olamaz.

4. a, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, m tek sayı, $a > 1$ olsun. Bu durumda $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ sayılarının en büyük ortak böleni nedir?

Çözüm. d, $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ sayılarının bir ortak böleni olsun.

$$\begin{aligned} a^{mn} \equiv (a^m)^n &\equiv 1 \ (mod\ d) \\ a^{mn} \equiv (a^n)^m &\equiv -1 \ (mod\ d) \end{aligned}$$

olduğundan $d | [(a^{mn} + 1) - ((a^{mn} - 1)])$ yani $d|2$ elde edilir. Bu durumda d sadece 1 ya da 2 değerlerini alabilir. a tekse $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ çift sayı olacağından $d = 2$, a çift olduğunda ise $a^m - 1$ ve $a^n + 1$ tek olacağından $d = 1$ olur.

5. n pozitif çift bir tam sayı olmak üzere a ve b aralarında asal pozitif tam sayılardır. $(a + b)|(a^n + b^n)$ koşulunu sağlayan tüm a ve b sayılarını bulunuz.

Çözüm. n çift bir tam sayı olduğu için $a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} - a^{n-4}b^2 + \cdots + b^{n-2})$ dir. $a + b$, $a^2 - b^2$ nin bir çarpanı olduğu için, $(a + b)|(a^n - b^n)$ olur. Dolayısıyla $a + b$ hem $(a^n + b^n) + (a^n - b^n) = 2a^n$ hem de $(a^n + b^n) - (a^n - b^n) = 2b^n$ nin bir böleni olmalıdır. a ve b aralarında asal oldukları için $(2a^n, 2b^n) = 2$'dir. Bu nedenle $(a + b)|2$ olur. Yani, $a = b = 1$ dir.

6. $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Soruda verilen sayıya N diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{11\ldots11}_{2009} \cdot 10^{2011} + \underbrace{22\ldots22}_{2010} \cdot 10 + 5 \\ &= \frac{1}{9}(10^{2009} - 1) \cdot 10^{2011} + \frac{2}{9}(10^{2010} - 1) \cdot 10 + 5 \\ &= \frac{1}{9}(10^{4020} - 10^{2011} + 2 \cdot 10^{2011} - 20 + 45) \\ &= \frac{1}{9}(10^{4020} + 2 \cdot 5 \cdot 10^{2010} + 25) \\ &= (\frac{1}{3}(10^{2010} + 5))^2 = (\frac{1\overbrace{00\ldots00}^{2009}5}{3})^2 = \underbrace{33\ldots33}_{2009}5^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\underbrace{11\ldots11}_{2009}\underbrace{22\ldots22}_{2010}5$ sayısı bir tam karedir.

7. $T = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{20}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. i pozitif tam sayısı için $\underbrace{11\ldots1}_{i} = \frac{10^i-1}{9}$ olduğundan

$$\begin{aligned} T &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \ldots + \frac{10^{20}-1}{9} = \frac{(10+10^2+\ldots+10^{20})-20}{9} \\ &= \frac{10(\frac{10^{20}-1}{9})-20}{9} = \frac{10^{21}-190}{81} \end{aligned}$$

elde edilir.

8. n, 6 dan büyük bir tam sayı olsun. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğuna göre $n^2(n^2+16)$ nın 720 ile bölünebildiğini gösteriniz. Eğer $n^2(n^2+16)$ 720 ile bölünebiliyorsa $n-1$ ve $n+1$ sayılarından ikisi birden asal olmak zorunda mıdır?

   Çözüm. $n-1$ ve $n+1$ asal sayılar olduğundan, n çifttir. O halde, n^4 ve $16n^2$, 2^4 ile bölünebildiğinden $n^4+16n^2 = n^2(n^2+16)$ da 2^4 ile bölünebilir. $n-1, n, n+1$ ardışık üç sayı olduğu için bu sayılardan birisi 3 ile bölünebilir. Ancak $n > 6$ ve $n-1$ ile $n+1$ asal oldukları için 3 sadece n yi bölebilir. Buradan da n^2, dolayısıyla da $n^2(n^2+16)$ 9 tarafından bölünebilir.
   $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ardışık beş sayı olduğu için bu sayılardan herhangi biri 5 ile bölünebilir. Ancak $n > 6$ ve $n-1$ ile $n+1$ asal oldukları için 5 diğer üç sayıdan tam olarak birisini böler. Yani $(n-2)n(n+2) = n^3-4n$, 5 tarafından bölünebilir. O halde $n(n^3-4n)$ de 5 ile bölünebilir. $20n^2$ nin 5 ile bölünebileceği de açıktır. Buradan da
   $$n(n^3-4n)+20n^2 = n^4+16n^2 = n^2(n^2+16)$$
   ifadesinin 5 ile bölüneceği sonucu çıkar.
   $n^2(n^2+16)$, $2^4, 3^2$ ve 5 tarafından bölünebildiği ve bu sayılar aralarında asal oldukları için $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ ile de bölünebilir.
   Önermenin tersi ise doğru değildir. $n = 78$ alındığında $78^2(78^2+16)$ 720 tarafından bölünebilmesine rağmen $n-1 = 77$ asal değildir.

9. $p, 4p^2+1$ ve $6p^2+1$ asal sayılar ise p nin alabileceği değerleri bulunuz.

   Çözüm. Sayıları (mod 5) te inceleyelim.
   $p \equiv 0 \pmod 5$ durumunda $p = 5$ olmalıdır. $4p^2+1 = 101$ ve $6p^2+1 = 151$ asal olduklarından $p = 5$ sorudaki şartları sağlar.
   $p \equiv 1, 4 \pmod 5$ durumunda $4p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir.
   $p \equiv 2, 3 \pmod 5$ durumunda $6p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir.
   $6p^2+1 > 4p^2+1 > 5$ olduğundan $p = 5$ dışında çözüm yoktur.

10. 1978 yılı ilk iki basamağının son iki basamağına eklenince ortadaki iki basamağını vermesi (19+78=97) bakımından ilginç bir yıldı. 1978 den bir önceki ve bir sonraki ilginç yılları bulunuz.

Çözüm. Dört basamaklı $abcd$ sayısının ilginç olması için $1 \leq a \leq 9,\ 0 \leq b, c, d \leq 9$ olmak üzere

$$10a + b + 10c + d = 10b + c \Leftrightarrow 10a + d = 9(b - c) \Leftrightarrow a + d = 9(b - c - a)$$

olmalıdır. Buradan $a + d \equiv 0 \ (mod\ 9)$ ve $b - c - a \geq 1$ çıkar. $1 \leq a + d \leq 18$ olduğundan $a + d = 9$ ya da $a + d = 18$ dir. İlk olarak ikinci durumu ele alalım. $a = d = 9$ olursa, $2 = b - c - a = b - c - 9$ ve $11 = b - c$ olur; fakat bu olanaksızdır. Sonuç olarak $a + d = 9$ ve $b - c = a + 1$ olmalıdır. Bu durumda 4 rakamlı ilginç sayıları bulmak için $0, 1, \ldots, 9$ rakamlarından $a + d = 9$ ve $b - c = a + 1$ şartlarını sağlayan a, b, c, d nin seçilmesi gerekir.
1868 ve 2307 aranan yıllardır.

11. Hiç bir pozitif n tam sayı için $n(n + 1)(n + 2)$ nin bir tam kare olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. $n(n + 1)(n + 2)$ yi tam kare yapan pozitif bir n sayısının varlığını kabul edelim. $(n, n + 1) = (n + 1, n + 2) = 1$ olduğundan $(n + 1, n(n + 2)) = 1$ ve sonuç olarak $n(n + 2)$ bir tam kare olur. Fakat $n(n + 2) = (n + 1)^2 - 1$ dir ve iki pozitif tam karenin farkı herzaman 1 den büyük olacağı için bu imkansızdır.

12. $ab = obeb(a, b) + okek(a, b)$ denklemini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemin sol tarafı ve sağ tarafında bulunan $okek(a, b)$ teriminin ikisi de a ile tam bölünebildiği için $obeb(a, b)$ de a ile tam bölünebilmelidir. Öte yandan a pozitif olduğu için $obeb(a, b) \leq a$ dır. Sonuç olarak $obeb(a, b) = a$ bulunur. Benzer şekilde $obeb(a, b) = b$ ve buradan $a = b$ elde edilir. Bu durumda verilen denklem $a^2 = a + a$ yani $a(a - 2) = 0$ denklemine denktir. Bu denklemin pozitif tam sayı olarak tek bir çözümü vardır. Cevap $(a, b) = (2, 2)$ dir.

13. Ard arda yazılan $1, 2, \ldots, 10$ sayılarının aralarına $+$ ve $-$ işaretleri nasıl konulursa konulsun toplamın hiçbir zaman 0 olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ bir tek sayıdır. İşaret değiştirmeler tek veya çift olma özelliğini etkilemeyeceği için, $1 \pm 2 \pm \cdots \pm 10$ toplamı hiçbir zaman bir çift sayı olamayacaktır. Bu yüzden toplam olarak 0 elde etmek imkansızdır.

14. $n^2 + 23$ sayısının sonsuz farklı n tam sayısı için 24 ile tam bölündüğünü ispatlayınız.

Çözüm. $n^2 + 23 = n^2 - 1 + 24 = (n - 1)(n + 1) + 24$ olduğundan $n = 24m \pm 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sayılarının 24 ile tam bölünen sonsuz tane $n^2 + 23$ sayısı üreteceği görülür.

15. p nin bir asal sayı olması durumunda $8p-1$ ve $8p+1$ sayılarından en az bir tanesinin bileşik sayı olacağını gösteriniz.

Çözüm. $p = 3$ ise $8p - 1 = 23$ ve $8p + 1 = 25$ olur. Yani $p = 3$ için önerme doğrudur. $p \neq 3$ durumunda $p = 3k + 1$ ya da $p = 3k + 2$ dir. $p = 3k + 1$ durumunda $8p + 1 = 24k + 9 = 3(8k + 3)$ bileşik sayıdır. $p = 3k + 2$ durumunda ise $8p - 1 = 24k - 15 = 3(8k - 5)$ bileşik sayıdır.

16. Her n doğal sayısı için $n^5 - 5n^3 + 4n$ sayısının 120 nin bir tam katı olacağını ispatlayınız.

Çözüm. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ olarak yazılabilir. $\binom{n+2}{5}$ tam sayı olduğundan ardışık 5 tam sayının çarpımı 120 ile bölünür. Bu durumda $n^5 - 5n^3 + 4n$ de 120 ile bölünür.

17. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99!$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. $(k+1)! = (k+1)k! = k \cdot k! + k!$ olduğundan $(k+1)! - k! = k \cdot k!$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1! &= 2! - 1! \\
2 \cdot 2! &= 3! - 2! \\
3 \cdot 3! &= 4! - 3! \\
&\vdots \\
98 \cdot 98! &= 99! - 98! \\
99 \cdot 99! &= 100! - 99!
\end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! = 100! - 1$ buluruz.

18. $\{1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden kalan tüm elemanların çarpımı bir tam kare olacak şekilde en az kaç sayı silebiliriz?

Çözüm. $28! = 2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ tür. Yani 17, 19, 23 mutlaka silinmelidir. Bunlardan başka en az bir sayı daha silinmelidir. 6, 17, 19 ve 23 ü silersek istenen şart sağlanmış olur yani cevap 4'tür.

19. Birinci ve ikinci terimleri 1 olan ve her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edilen dizinin (Fibonacci dizisi) her beşinci teriminin 5 ile bölünebildiğini gösteriniz.

Çözüm. Dizinin n. terimi, önceki terimlere $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ eşitliğiyle bağlıdır. Bu eşitlikten

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3} = 3a_{n-3} + 2a_{n-4} = 5a_{n-4} + 3a_{n-5}$$

ve sonuç olarak $a_n = 3a_{n-5}(\text{mod } 5)$ elde edilir. $a_5 = 0(\text{mod } 5)$ olduğundan, her beşinci terim 5 ile bölünebilir.

20. 18 ile 57 arasındaki 40 tam sayı yan yana yazılarak 80 basamaklı bir sayı $(1819\ldots57)$ elde edilmiştir. 3^k nın, bu sayıyı böldüğü en büyük k tam sayısını bulunuz.

    Çözüm. Elde edilen sayı oluşturulurken 1 rakamı toplam olarak 6 kez; 2,3 ve 4 rakamlarının her birisi 14 kez; 5 rakamı 12 kez; 6,7,8,9 ve 0 rakamlarının her birisi 4 kez kullanılmıştır. Sayıyı oluşturan rakamların sayı değerlerinin toplamı $6\cdot1+14\cdot(2+3+4)+12\cdot5+4\cdot(6+7+8+9)=312$ dir. 312 sayısı 3 ile bölünüp, 9 ile bölünmediğinden $k=1$ olur.

21. Herhangi üç tek doğal sayı için, dördünün karelerinin toplamı yine bir tam kare olacak şekilde dördüncü bir tek sayının bulunabileceğini gösteriniz.

    Çözüm. x, y, ve z üç tek sayı olsun. O zaman $x^2+y^2+z^2$ de tektir. Bunu kullanarak $x^2+y^2+z^2=2p+1=(p+1)^2-p^2$ yani $x^2+y^2+z^2+p^2=(p+1)^2$ yazılabilir.

    $$x^2+y^2+z^2=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2=4k+3=2(2k+1)+1=2p+1$$

    olduğundan $p=2k+1$ olur. Yani p tektir.

22. Verilen $P(x)=x^3+x^2+x+2$, ve $Q(x)=x^3-x+3$ polinomları için $Q(a)$ nın $P(a)$ yı bölmesini sağlayacak bir a tam sayısının olmadığını gösteriniz.

    Çözüm. $Q(a)=a^3-a+3=(a-1)a(a+1)+3$ olduğundan 3 e bölünür. Ancak $a\equiv 0,1,2 \pmod 3$ için $P(a)\equiv 0(\text{mod } 3)$ elde edilemez. Yani $Q(a))|P(a)$ şartını sağlayan bir a tam sayısı yoktur.

23. İlk terimi 10 olan bir dizide her çift terimden bir sonraki terim o terimin yarısı, her tek terimden bir sonraki terim de bir önceki terimin 2 katının 2 fazlasıdır. Dizinin 2010. terimini bulunuz.

    Çözüm. Dizinin ilk terimleri 10, 5, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... şeklindedir. Dizinin 7. terimden başlayarak üç terim periyoduyla kendisini tekrarladığı görülmektedir. Bu durumda $2010\equiv 0(\text{mod } 3)$ olduğundan, 2010. terim, 9. terime eşit olacaktır. Yani 2010. terim 1 dir.

24. Bir okuldaki birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinden oluşan bir grubun %55'i erkek öğrencidir. Ayrıca bu gruptaki erkek birinci sınıf öğrencisi sayısının erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranı, gruptaki birinci sınıf öğrencisi sayısının ikinci sınıf öğrencisi sayısına oranına eşittir. Bu durumda erkek birinci sınıf öğrencilerin sayısının bayan birinci sınıf öğrencilerinin sayısına oranını bulunuz.

Çözüm. Bu gruptaki bayan ikinci sınıf öğrencisi sayısına x, bayan birinci sınıf öğrencisi sayısına y, erkek ikinci sınıf öğrencisi sayısına z ve erkek birinci sınıf öğrencisi sayısına w diyelim.

Bu durumda $z+w = 0,55(x+y+z+w)$ ve $\frac{w}{z} = \frac{y+w}{x+z}$ olur. Bulmak istediğimiz değer ise $\frac{w}{y}$ olur.

Şimdi $\frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$ eşitliğinden $\frac{z+w}{w} = \frac{x+y+z+w}{y+w}$ bulunur.

Dolayısıyla $\frac{w}{y+w} = \frac{z+w}{x+y+z+w} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$ olduğundan $\frac{y}{w} = \frac{9}{11}$ yani $\frac{w}{y} = \frac{11}{9}$ olarak bulunur.

25. Verilen herhangi iki a ve b tam sayıları için $x^2+xy+y^2 = 3a^2+b^2$ olacak şekilde x ve y tam sayıları bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. $x=(a+b)$, $y=(a-b)$ alınırsa $x^2+xy+y^2 = (a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2 = 3a^2+b^2$ olur.

26. Her pozitif n tam sayısı için, $u(n)$ ile n yi aşmayan en büyük asal sayı, $v(n)$ ile de n den büyük en küçük asal sayı gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \ldots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. p ve q ardışık asal sayılar ve $p<q$ olsun. $p \le n < q$ koşulunu sağlayan $q-p$ tane sayıdan her birisi için $u(n)=p$ ve $v(n)=q$ dur. Bu durumda, verilen toplamda $\frac{1}{pq}$ terimi tam olarak $q-p$ kere geçmektedir. İstenilen toplamı T ile gösterirsek 2003 ve 2011 ardışık asal sayılar olduklarından

$$\begin{aligned} T &= \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{2011-2003}{2003\cdot 2011} \\ &= (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2003}-\frac{1}{2011}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2011} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

27. Her n pozitif tam sayısı için, $\binom{2n}{n}$ sayısının, $n+1$ ve $4n-2$ ile bölünebildiğini gösteriniz.

Çözüm. Her $n>0$ için, $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1}$ ifadesi bir tam sayıdır. n ve $n+1$ sayıları aralarında asal oldukları için, $\binom{2n}{n}$ sayısı $n+1$ e bölünür.

Şimdi, her $n>0$ için, $\frac{n}{2n(2n-1)}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ dir. Az önceki nedenden dolayı, her $n>1$ için bu bir tam sayıdır. $n=1$ durumu ayrıca kontrol edilerek $\binom{2n}{n}$ sayısının $2(2n-1) = 4n-2$ ye bölündüğü görülür.

28. $n = 0, 1, \ldots, 2010$ olmak üzere, $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle, $n = 0$ için, $A_0 = 1 + 9 + 25 = 35 = 5 \cdot 7$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla A_n sayılarının en büyük ortak böleni ancak 35, 7, 5 veya 1 olabilir. Bu durumda A_n sayısına önce (mod 5) te bakalım.

$$A_n \equiv 2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \ (mod\ 5)$$

olur. $n = 1$ için $A_1 \equiv 9 \neq 0$ (mod 5) olduğundan, 5, A_n sayılarının ortak böleni olamaz.

Şimdi A_n sayısına (mod 7) de bakalım.

$$\begin{aligned} A_n &= 8^n + 9 \cdot 9^{3n} + 25 \cdot 25^{3n} \equiv 1 + 2 \cdot 2^{3n} + 4 \cdot 4^{3n} \\ &\equiv 1 + 2 \cdot 8^n + 4 \cdot 64^n \equiv 1 + 2 \cdot 1^n + 4 \cdot 1^n \equiv 7 \equiv 0 \ (mod\ 7) \end{aligned}$$

olur. Yani $n \geq 0$ için 7, her A_n sayısını böler.

Sonuç olarak, 5 bazı A_n sayılarını bölmediği için, A_n sayılarının 7 den büyük ortak böleni olamaz. Yani $A_0, A_1, \ldots, A_{2010}$ sayılarının en büyük ortak böleni 7 dir.

29. Birbirinden ve sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için ab iki basamaklı sayısını bölen c, bc iki basamaklı sayısını bölen a ve ac iki basamaklı sayısını bölen b sayıları bulunabilir mi?

Çözüm. Eğer a, b, c rakamları verilen koşulları sağlıyorlarsa ve en az birisi çift sayı ise hepsinin çift sayı olması gerekir. Ve $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sayıları da aynı koşulları sağlar. Yani genelliği kaybetmeden a, b, c sayılarının tek sayılar oldukları kabul edilebilir. Ayrıca bu sayıların hiç birisi 5 olamaz. Yani a, b, c sayıları 1,3,7,9 sayılarından seçilmelidir. Bu durumda 3 ve 9 sayılarından en az biri seçilmelidir. $a = 3$ olursa bc nin hiç bir değeri 3'e bölünmez. Benzer şekilde $a = 9$ olursa bc nin hiç bir değeri 9'a bölünmez. Sonuç olarak istenen koşullarda a, b, c sayıları seçilemez.

30. $\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \cdots \frac{3x+49}{48}$, kesirlerinin her birinin sadeleşmiş olması, yani payları ve paydalarının aralarında asal olmasını sağlayan en küçük x pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Verilen kesirlerin her biri $\frac{3x+1+k}{k} = \frac{3x+1}{k} + 1$ şeklinde olduğu için payları ve paydalarının aralarında asal olması için $3x + 1$ in $8, 9, 10, \ldots, 48$ sayılarından hiç biri ile ortak bir çarpanı olmaması gerekir. Bir başka ifadeyle verilen problem, $3x+1$ in 2 den 47 ye kadar olan hiçbir asal sayı ile bölünmemesi için x in en az kaç olması gerektiği sorusuna denktir. Bu durumda $3x + 1$ in 47 den büyük ve (mod 3) te 1 e denk olan en küçük asal sayı yani 61 olması gerekir. Cevap $x = 20$ dir.

31. Issız bir adaya düşen beş adam bir miktar hindistan cevizi toplarlar. Adamlardan her birisi sırayla hindistan cevizlerinin başında nöbet tutacaktır. Her adam nöbeti sırasında şu işlemleri gerçekleştirir:

- Önce hindistan cevizlerini 5 eşit gruba ayırır.
- Her defasında 1 hindistan cevizi artar ve artan hindistan cevizini bir maymuna verir.
- Bir hindistan cevizi grubunu kendisi için saklayıp geri kalan hindistan cevizlerini tekrar tek bir grup haline getirir.

Bu durumda başlangıçta en az kaç hindistan cevizi vardır?

Çözüm. Toplanan hindistan cevizi sayısına n diyelim. İlk adamın hindistan cevizlerini 5 e bölerek elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına a, ikinci adamın elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına b, $\ldots$, beşinci adamın elde ettiği grupların her birindeki hindistan cevizi sayısına e diyelim. Bu durumda $n = 5a + 1$ olur. İlk adam bir gurbu kendisi için sakladığı ve artan bir hindistan cevizini maymuna verdiği için geriye $4a$ hindistan cevizi kalır. Aynı şekilde $4a = 5b + 1$, $4b = 5c + 1$, $4c = 5d + 1$, $4d = 5e + 1$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
n &= 5a + 1 \Leftrightarrow n + 4 = 5(a + 1) \\
4a &= 5b + 1 \Leftrightarrow 4(a + 1) = 5(b + 1) \\
4b &= 5c + 1 \Leftrightarrow 4(b + 1) = 5(c + 1) \\
4c &= 5d + 1 \Leftrightarrow 4(c + 1) = 5(d + 1) \\
4d &= 5e + 1 \Leftrightarrow 4(d + 1) = 5(e + 1)
\end{aligned}$$

Buradan $n + 4 = 5(a + 1) = \frac{5^2}{4}(b + 1) = \frac{5^3}{4^2}(c + 1) = \frac{5^4}{4^3}(d + 1) = \frac{5^5}{4^4}(e + 1)$ bulunur ve $n = \frac{5^5}{4^4}(e + 1) - 4$ elde edilir ve $(e + 1)$, 256 nın bir katı olur. k pozitif bir tam sayı olmak üzere $(e + 1) = 256k$ için $n = 5^5k - 4 = 3125k - 4$ olur. Bu durumda en az hindistan cevizi sayısı $k = 1$ olduğunda elde edilir ve $n = 3125 - 4 = 3121$'dir.

32. n bir tam sayı olmak üzere, $n + 3$ ve $n^2 + 3$ ün ikisi birden bir tam küp olabilirler mi?

Çözüm. $n + 3$ ve $n^2 + 3$ ün ikisi de bir tam küp ise bunların çarpımları da bir tam küp olmalıdır. Yani, $a^3 = (n + 3)(n^2 + 3) = n^3 + 3n^2 + 3n + 9 = (n + 1)^3 + 8$ dir. $(n + 1)^3 + 8$ in bir tam küp olması için, $a^3 - (n + 1)^3 = 8$ olmalıdır. Farkları 8 olan iki tam küp ifadeleri ancak $(-8, 0)$ ve $(0, 8)$ dir. Dolayısıyla, $(n + 1)^3 = -8$ veya $(n + 1)^3 = 0$ olmalıdır. Yani, $n = -3$ ve $n = -1$ dir.

Fakat, $n = -3$ ve $n = -1$ için, $n^2 + 3$ bir tam küp olamayacağından dolayı, hiç bir n tam sayısı için $n + 3$ ve $n^2 + 3$ sayılarının ikisi birden tam küp olamazlar.

33. Ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamının bir tam sayının birden büyük bir kuvveti olamayacağını gösteriniz. Yani, $(n+1)^2 + \cdots + (n+9999)^2 = m^r$ ifadesini sağlayan ve $r > 1$ olan n, m, r tam sayılarının olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Ardışık 9 tam sayının karelenin toplamı

$$0^2 + 1^2 + \ldots + 8^2 \equiv 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \equiv 6 \ (mod\ 9)$$

olduğundan ardışık 9999 tam sayının karelerinin toplamı $1111 \cdot 6 \equiv 6 \pmod 9$ olur. Bu durumda, $m^r \equiv 6 (\text{mod } 9)$ olmalıdır. Yani, m^r, 3 e tam bölünür fakat $3^2 = 9$ a tam bölünmez, bu nedenle $r > 1$ olamaz.

34. $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ denklemini sağlayan bütün (a, b) tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. Verilen eşitliği b bilinmeyenine göre ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem olarak düşünelim: $5b^2 + (5a-14)b + 5a^2 - 7a = 0$. Bu denklemin çözümleri

$$b_{1,2} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} \quad \text{dir.}$$

Çözümlerin gerçel sayılar olabilmesi için $196 - 75a^2 \geq 0$ olması, başka bir deyişle $a^2 \leq \frac{196}{75}$ olması, gerekir. Buradan $-\frac{14\sqrt{3}}{15} \leq a \leq \frac{14\sqrt{3}}{15}$ elde ederiz. a bir tam sayı olduğundan dolayı, a sayısının alabileceği değerler $-1, 0$ ve 1 dir. Bu değerleri denklemde yerine koyduğumuzda şu üç durumu elde ederiz:
$a = -1$ ise $b_1 = 3$ ve $b_2 \notin \mathbb{Z}$ buluruz,
$a = 0$ ise $b_1 \notin \mathbb{Z}$ ve $b_2 = 0$ buluruz,
$a = 1$ ise $b_1 = 2$ ve $b_2 \notin \mathbb{Z}$ buluruz.
Dolayısıyla çözüm kümesi $\{(-1,3), (0,0), (1,2)\}$ dir.

35. $|3^a - 2^b| = 1$ eşitliğini sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. $b < 3$ durumunda $(1,1)$ ve $(1,2)$ ikilileri verilen eşitliği sağlamaktadır. $b \geq 3$ durumunu incelemek yeterli olacaktır.
$b \geq 3$ olduğundan $2^b \equiv 0 (\text{mod } 8)$ olacaktır. Ayrıca, negatif olmayan her n tam sayısı için $3^{2n} \equiv 1 (\text{mod } 8)$ ve $3^{2n+1} \equiv 3 (\text{mod } 8)$ dir. Yani, $3^a - 2^b \equiv \pm 1 (\text{mod } 8)$ olması için a nın bir çift sayı ve $3^a - 2^b = 1$ olması gerekir.
$a = 2c$ dersek $2^b = 3^{2c} - 1 = (3^c - 1)(3^c + 1)$ olacağından, $(3^c - 1)$ ve $(3^c + 1)$ sayıları 2 nin kuvvetleridir. Farkları iki olduğu için, $3^c - 1 = 2$ ve $3^c + 1 = 4$ olmalıdır. Buradan $a = 2$ ve $c = 2$ bulunur. Sonuçta, $b \geq 3$ durumda tek çözüm $(2, 3)$ tür.
Sonuç olarak tüm çözümler $(1,1), (1,2)$ ve $(2,3)$ ikilileridir.

36. On tabanında $(abcd)_{10}$, yedi tabanında ise $(dcba)_7$ olarak ifade edilen bütün tam sayıları bulunuz.

Çözüm. Soruda verilen eşitlik kullanılarak

$$(abcd)_{10} = (dcba)_7 \Leftrightarrow 999a + 93b = 39c + 342d \Leftrightarrow 333a + 31b = 13c + 114d$$

$a > 0$, $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ elde edilir. $a \geq 3$ durumunda $13c + 114d < 999$ olduğundan çözüme ulaşılmaz. Yani $a = 1$ ya da $a = 2$ olmalıdır.

$a = 1$ için $333 + 31b = 13c + 114d$ olduğundan $3 \leq d \leq 4$ bulunur.
$d = 3$ için $b \equiv c \pmod 9$ olduğundan $b = c$ ve buradan da $18b = 9$ elde edilir ve çözüm yoktur.
$d = 4$ için $31b - 13c = 123$ olduğundan $5 \leq b \leq 6$ bulunur. Bu değerler denenince çözüm gelmediği görülür.

$a = 2$ için $666 + 31b = 13c + 114d$ olduğundan $d = 6$ bulunur. $b \equiv c \pmod 9$ olduğundan $b = c$ elde edilir. Bu durumda tek çözüm $(abcd)_{10} = 2116$ olur.

37.
$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1997 \cdot 1998}$$

ve

$$B = \frac{1}{1000 \cdot 1998} + \frac{1}{1001 \cdot 1997} + \ldots + \frac{1}{1998 \cdot 1000}$$

olmak üzere, $\frac{A}{B}$ sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{1998}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{999} \\
&= (1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{999}\right) + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{1998} \\
&= \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \ldots + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1998}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da;

$$
\begin{aligned}
2A &= \left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right) \\
&= 2998\cdot\left(\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}\right) \\
&= 2998\cdot B
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\frac{A}{B}=1499$ bir tam sayıdır.

38. 2^a sayısının basamakları uygun şekilde yer değiştirildiğinde 2 nin başka bir kuvveti elde edilmesini sağlayan bir a tam sayısı var mıdır?

Çözüm. $a<b$ olmak üzere, 2^a nın basamaklarını uygun şekilde yer değiştirerek 2^b sayısının elde edildiğini kabul edelim. Bu durumda 2^b-2^a tam sayısı 9 ile bölünmelidir. $2^3<10<2^4$ olduğundan, basamak sayısı aynı olan en fazla 4 tane 2 nin kuvveti olabilir. Örnek olarak, $1,2,4$ ve 8 i verebiliriz.
Yani, $c=1,3$ veya 7 olmak üzere, $2^b-2^a=c\times 2^a$ dır. Buradan da 9 un 2^b-2^a nın bir çarpanı olmadığı bulunur. Yani, böyle bir a tam sayısı yoktur.

39. Hipotenüs uzunluğu $\sqrt{2006}$ ve dik kenarları tam sayı olan dik üçgen var mıdır?

Çözüm. İstenen şekide bir üçgenin olduğunu kabul edelim. Dik kenarlara x ve y diyelim. Pisagor teoreminden dolayı $x^2+y^2=2006$ dır. 2006 çift sayı olduğu için x^2 ve y^2 ya ikisi birden tek ya da ikisi birden çift sayı olmalıdır. Eğer ikisi de çift sayı olsaydı 2006 nın 4 ile tam bölünmesi gerekirdi. Bundan dolayı tek sayı olmalıdırlar. k ve l pozitif tam sayılar olmak üzere $x=2k+1$ ve $y=2l+1$ dönüşümü yaparsak,

$$
\begin{aligned}
(2k+1)^2+(2l+1)^2 &= 2006 \\
4k^2+4k+4l^2+4l &= 2004 \\
k(k+1)+l(l+1) &= 501
\end{aligned}
$$

bulunur. İki ardışık sayının çarpımı çift sayıdır. Bu nedenle, $k(k+1)$ ve $l(l+1)$ çift sayılardır. Toplamları da çift olacağından dolayı k ve l tam sayı olamaz. Yani, istenen şekilde bir dik üçgen yoktur.

40. Bir bilgisayar, $n=1,2,3,\ldots$ için $(n+1)2^n$ ifadesinin değerlerini vermektedir. En fazla kaç tane tam kare değer arka arkaya gelir?

Çözüm. İki ardışık değer tam kare olabilir, mesela, $n=7$ ve $n=8$ için sırasıyla $8.2^7=(2^5)^2$ ve $9.2^8=(3.2^4)^2$ olur.
Şimdi üç ardışık değerin tam kare olamayacağını göstereceğiz. Bir n tam sayısı için $(n+1)2^n$ ve $(n+3)2^{n+2}$ nin tam kare olduğunu varsayalım. Eğer n çift ise

$n+1$ ve $n+3$ sayılarının tam kare olması gerekir, ancak bu, pozitif tam sayılar için imkansızdır. Eğer n tek ise, yani bir $k \geq 0$ için $n = 2k+1$ ise, $(n+1)2^n = (2k+2)2^{2k+1} = (k+1)2^{2k+2}$ ve $(n+3)2^{n+2} = (2k+4)2^{2k+3} = (k+2)2^{2k+4}$ olur ve bu durumda 2^{2k+2} ve 2^{2k+4} tam kare olduğu için $k+1$ ve $k+2$ tam kare olmalıdır, ancak bu, negatif olmayan k tam sayıları için imkansızdır.
Dolayısıyla cevap 2'dir.

41. Elimizde 1 Kr, 5 Kr, 10 Kr, 25 Kr, 50 Kr ve 1 TL lik madeni paraların her birinden n tane bulunmaktadır. Bu paralardan seçilen n tanesinin toplamının 1 TL olmasının mümkün olamayacağı en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm. Toplamı 1 TL olacak şekilde seçilebilen n tane madeni paranın a tanesi 1 Kr, b tanesi 5 Kr, c tanesi 10 Kr, d tanesi 25 Kr, e tanesi 50 Kr ve f tanesi 1 TL olsun $(a, b, c, d, e, f \geq 0)$. $a+5b+10c+25d+50e+100f = 100$ ve $a+b+c+d+e+f = n$ denklemleri elde edilir. Buradan $4b + 9c + 24d + 49e + 99f = 100 - n$ bulunur.
Aradığımız n sayısı, son denklemin çözümünün olamayacağı en küçük n sayısıdır. Başka bir deyişle, biz son denklemin çözümünün olamayacağı en büyük $100 - n$ değerini arıyoruz. Ya da, $4b + 9c + 24d + 49e + 99f$ ifadesinin alamayacağı, 100 den küçük, en büyük tam sayı değerini arıyoruz. (b, c, d, e, f sayılarının negatif olmayan tam sayılar olduğunu hatırlayalım.) $c = d = e = f = 0$ seçerek (mod 4) te 0 olan sayıları, $c = 1$, $d = e = f = 0$ seçerek 9'dan büyük (mod 4) te 1 olan sayıları, $c = 2$, $d = e = f = 0$ seçerek 18'den büyük (mod 4) te 2 olan sayıları ve $c = 3$, $d = e = f = 0$ seçerek 27'den büyük (mod 4) te 3 olan sayıları elde edebiliriz. Yani bu ifadenin alamayacağı en büyük iki basamaklı tam sayı değeri 23'tür.
Dolayısıyla, n nin en küçük değeri 77'dir.

42. $n > 1$ pozitif bir tam sayı ve p, $n|(p-1)$, $p|n^3 - 1$ şartlarını sağlayan bir asal sayı ise $4p - 3$ ün bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. p bir asal sayı ve $p|n^3-1$ olduğundan ya $p|n-1$ ya da $p|n^2+n+1$ dir. Birinci durum $n|p-1$ olduğundan imkansızdır. $p|n^2+n+1$ durumunda $n^2+n+1 = pt$ denklemini sağlayan bir t tam sayısı bulunur. $p \equiv 1 \pmod{n}$ olduğundan $t \equiv 1 \pmod{n}$ olur. Yani $n^2+n+1 = (nk+1)(nk'+1)$ eşitliği elde edilir. $k' > 0$ ise sağ taraf daha büyük olacağından çelişkiye ulaşılır. Sonuç olarak $k' = 0$ dır. Buradan $n^2+n+1 = p$ bulunur ki bu da $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ olduğunu gösterir.

43. Her n doğal sayısı için $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169 un bir tam katı olacağını ispatlayınız.

Çözüm. $P(n)$ ile $3^{3n+3}-26n-27$ sayısı 169'un bir tam katıdır önermesini gösterelim. Soruyu ispatlamak için tümevarım yöntemini kullanacağız.
$3^{3.1+3} - 26 \cdot 1 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$ olduğundan $P(1)$ doğru bir önermedir. $P(n-1)$ in

doğru olduğunu kabul edersek, yani $3^{3(n-1)+3} - 26(n-1) - 27 = 169M$ denklemini sağlayan bir M tam sayısının varlığını kabul edersek, buradan $3^{3n} - 26n - 1 = 169M$ çıkar.

$$\begin{aligned} 3^{3n+3} - 26n - 27 &= 27 \cdot 3^{3n} - 26n - 27 = 27(3^{3n} - 26n - 1) + 676n \\ &= 27 \cdot 169M + 169 \cdot 4n = 169(27M + 4n) \end{aligned}$$

olduğundan, $P(n-1)$ in doğruluğu $P(n)$ in doğruluğunu garantilemektedir. Sonuç olarak önerme tüm $n \geq 1$ tam sayıları için doğrudur.

44. **a)** x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2 + x$ ve $x^3 + 2x$ rasyonel ise x in rasyonel sayı olduğunu gösteriniz.
b) $x^2 + x$ ve $x^3 - 2x$ rasyonel sayılarken irrasyonel bir x sayısının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. a) $x^2 + x = a$ ve $x^3 - 2x = b$, $a, b \in Q$ olsun.

$$b = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 2x = x(x^2 + x) - (x^2 + x) + 3x = ax - a + 3x = x(a+3) - a$$

olur. $a \neq -3$ olduğunu gösterelim. Eğer $x^2 + x = -3$ ise $x^2 + x + 3 = 0$ ve $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} = 0$ dır. Bu x in gerçel sayı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $a \neq -3$ tür ve $x = \frac{a+b}{a+3}$ bulunur yani x bir rasyonel sayıdır.
b) $x^2 + x = a$ ve $x^3 - 2x = b$ ve $a, b \in Q$ olsun. Benzer şekilde,

$$b = x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 2x = x(x^2 + x) - (x^2 + x) - x = ax - a - x$$

bulunur. Yani, $x(a-1) = a + b$ dir. Eğer $a = 1$ seçilirse $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur ve irrasyoneldir. x in her iki değeri için de $b = x^3 - 2x = -a = -1$ dir. Dolayısıyla b rasyonel sayıdır.

45. a ve b, $\left(\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}\right)$ toplamını tam sayı yapan iki doğal sayıdır. a ve b'nin ortak bölenlerinin en büyüğünün $\sqrt{a+b}$ den büyük olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $d = (a, b)$, $a = md$, ve $b = nd$ olsun. Bu durumda

$$\frac{md+1}{nd} + \frac{nd+1}{md} = \frac{m^2d + m + n^2d + n}{mnd}$$

bir tam sayıdır. Bu yüzden $m^2d + m + n^2d + n$, dolayısıyla $m + n$ d'ye bölünür. Bundan da $d \leq m + n$ ve $d \leq \sqrt{d(m+n)} = \sqrt{a+b}$ olduğu çıkar.

46. $m^n - n^m = 3$ eşitliğini sağlayan bütün (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Eğer m ve n 'nin her ikisi de tek ya da her ikisi de çift olursa, $m^n - n^m$ işleminin sonucu bir çift sayı olur. O halde m ve n sayılarundan biri tek, diğeri ise çifttir.

m tek, n çift ise $m^n \equiv 1(\text{mod}4)$ olur. Bunu göstermek için $m = 2k+1$ ve $n = 2t$ alalım.

$$m^n \equiv (2k+1)^{2t} \equiv ((2k+1)^2)^t \equiv (4k^2+4k+1)^t \equiv 1^t \equiv 1(\text{mod}4)$$

olduğundan $m^n - n^m \equiv 3(\text{mod}4)$ ve $n^m \equiv 2(\text{mod}4)$ bulunur. Bu durumda $m = 1$ olur. Bu değer eşitliği sağlamaz.

m çift, n tek ise $n^m \equiv 1(\text{mod}8)$ olur. Bu da $m^n \equiv 4(\text{mod}8)$ yani $n \leq 2$ olmasını gerektirir. Bu koşulları ve eşitliği sağlayan tek (m,n) çifti $(4,1)$ dir.

47. a, b pozitif tam sayıları için $a + 77b$ nin 79 ile, $a + 79b$ nin de 77 ile bölünebildiği biliniyor. Buna göre $a + b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} 79|(a+77b) \Rightarrow 79|(a-2b) \Rightarrow 79|(-78a-2b) &\quad\Rightarrow\quad 79|(39a+b) \\ 77|(a+79b) \Rightarrow 77|(a+2b) \Rightarrow 77|(78a+2b) &\quad\Rightarrow\quad 77|(39a+b) \end{aligned}$$

olduğundan $79 \cdot 77|(39a+b)$ olur. Yani $39a + b = 79 \cdot 77k$ olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. Buradan

$$39a + 39b = 79 \cdot 77k + 38b = (78^2 - 1)k + 38b = (78^2 - 39)k + 38(k+b)$$

bulunur. Yani $39|(b+k)$ olur. Buradan da $k \geq 1$ olduğu da göz önüne alınınca

$$b + k \geq 39 \Rightarrow 39a + 39b \geq (78^2 - 39) + 38 \cdot 39 \Rightarrow a + b \geq 156 - 1 + 38 = 193$$

elde edilir. Örnek olarak $k = 1$, $b = 38$, $a = 155$ alabiliriz.

48. Bir grup çocuk bir torbadaki cevizleri paylaşırlar. Birinci çocuk önce bir ceviz ve sonra da geride kalan cevizlerin onda birini; ikinci çocuk iki ceviz ve geriye kalanların onda birini; üçüncü çocuk da üç ceviz ve geriye kalanların onda birini alır. İşlem bu şekilde sürer ve son çocuk geriye kalan cevizlerin tümünü alır. Sonuçta tüm çocukların aldığı ceviz sayısının eşit olduğu görülür. Çocukların ve cevizlerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Çocukların sayısını n, çocuk başına düşen ceviz sayısını da x ile gösterelim. Tüm cevizlerin sayısı $N = nx$ ile gösterirsek, birinci çocuğun aldığı ceviz sayısı $1 + \frac{N-1}{10} = x$ olduğundan $N = 10x - 9$ bağıntısı elde edilir.

Sondan bir önceki çocuk, $(n-1)$ tane ceviz aldıktan sonra geriye kalan y tane cevizin de onda birini alır. Bu durumda son çocuğa $\frac{9y}{10}$ ceviz kalacağından $\frac{9y}{10} = x$ veya $\frac{y}{10} = \frac{x}{9}$ olur ve böylece sondan bir önceki çocuğun aldığı ceviz sayısını $n-1+\frac{x}{9} = \frac{N}{x} - 1 + \frac{x}{9} = x$ şeklinde yazabiliriz. Birinci çocuk için bulduğumuz bağıntıyı kullanarak $\frac{10x-9}{x} - 1 + \frac{x}{9} = x$ yazabiliriz. Bu son denklem düzenlenerek $8x^2 - 81x + 81 = 0$ yani $(x-9)(8x-9) = 0$ elde edilir. Bu denklemin tam sayı çözümü olan $x = 9$ çocuk başına düşen cevizlerin sayısını verir. Buradan tüm cevizlerin sayısı da $N = 81$ olarak bulunur.

49. 7 den büyük her tam sayının, her biri 1 den büyük ve aralarında asal iki tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Çözüme şu hatırlatmayla başlayalım. Eğer d tam sayısı a ve b tam sayılarını bölüyorsa, bu sayıların farkını da böler. Buradan, aralarındaki fark 1, 2 veya 4 olan iki tek tam sayının aralarında asal olduğu sonucu çıkar.
7 den büyük bir n tam sayısı verilmiş olsun. Eğer n tek ise, bir $k \geq 3$ tam sayısı için $n = 2k+1 = k+(k+1)$ yazabiliriz. n nin çift olması halinde $k \geq 3$ tam sayısı için $n = 2k$ yazabiliriz. Bu sefer k tek ise $n = (k-2)+(k+2)$; k çift ise $n = (k-1)+(k+1)$ yazarak çözüme ulaşabiliriz.

50. $x + y - xy = 43$ denklemini sağlayan tüm (x, y) sıralı tam sayı çiftlerinin sayısını bulunuz.

Çözüm. Denklemi $xy - x - y + 43 = 0$ ya da $(x-1)(y-1) = -42$ şeklinde yazalım. -42 nin 8 pozitif tam sayı ve 16 tam sayı böleni vardır. Bu bölenlerden her birisi bir çözüm verdiğinden, denklemi sağlayan sıralı tam sayı çiftlerinin sayısı da 16 dır.

51. $n + k^2$ nin en az n tane pozitif k tam sayısı için tam kare olmasını sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunamayacağını gösteriniz.

Çözüm. n ve $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ pozitif tam sayıları için $n + k_i^2$ nin her $i = 1, \cdots, n$ için tam kare olduğunu kabul edelim. $m_i^2 = n + k_i^2$ olarak tanımlanan $m_i > 0$ sayıları için $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ ve $m_1 + k_1 < m_2 + k_2 < \ldots < m_n + k_n$ eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda $n = (m_i + k_i)(m_i - k_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ olduğu için n'nin en az $2n$ tane farklı pozitif böleni olması gerekir ki bu bir çelişkidir.

52. a, b, c, d tam sayıları için $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ denklemini sağlayan c ve d tam sayılarının ancak ve ancak $a \equiv b(\text{mod}2)$ olması durumunda bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Eğer a da b de çift ise,

$$a^2 + b^2 + 1 = 4t + 1 = (2t+1)^2 - (2t)^2$$

ifadesi, önermemizin $c = 2t$, $d = 2t + 1$ şeçilerek doğrulanabileceğini gösterir. Eğer a da b de tek ise,

$$a^2 + b^2 + 1 = 4t + 3 = (2t + 2)^2 - (2t + 1)^2$$

benzer şekilde önermemizi onaylar. Öte taraftan a, ve b'den birinin tek diğerinin de çift olması durumunda aynı ifade

$$a^2 + b^2 + 1 = 2x^2 + (2y + 1)^2 + 1 = 4t + 2 = 2(2t + 1)$$

olur. Oysa $d^2 - c^2$, $c \equiv d(\mathrm{mod}2)$ durumunda 4'e bölünürken, $c \equiv d + 1(\mathrm{mod}2)$ durumunda tektir. Bu yüzden $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$ sağlanamaz.

53. A ve B üç basamaklı iki pozitif tam sayı olmak üzere, A tam sayısının birinci ve üçüncü basamakları yer değiştirildiğinde B tam sayısı elde edilmektedir. A nın B ye bölümünden kalan, A nın basamakları toplamının yedi katı, bölüm ise 3 olduğuna göre A ve B sayılarını bulunuz.

Çözüm. Burada A ve B sayıları üç basamaklı olduğundan, $ac \neq 0$ olmak üzere $A = (abc)_{10} = 100a + 10b + c$ ve $B = (cba)_{10} = 100c + 10b + a$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 3(100c + 10b + a) + 7(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow 90a - 27b - 306c = 0 \Leftrightarrow 10a - 3b - 34c = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $10a = 3b + 34c$ olduğundan ve $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$ eşitsizliklerinden $30 \leq 10a \leq 90$ ve $30 \leq 3b + 34c \leq 90$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $c \in \{1, 2\}$ olur.
$c = 1$ durumunda $10a = 3b + 34$ olacağından ve $0 \leq b \leq 9$ olduğundan $34 \leq 3b + 34 = 10a \leq 61$ yani $a \in \{4, 5, 6\}$ bulunur. $a = 4$ için $b = \frac{10a-34}{3} = 2$ ve dolayısıyla $A = (abc)_{10} = 421$ ve $B = (cba)_{10} = 124$ bulunur. $a = 5$ ve $a = 6$ içinse b tam sayı değildir.
c=2 durumunda ise $10a = 3b+68$ olacağından $68 \leq 3b+68 \leq 95$ yani $68 \leq 10a \leq 95$ olacağından $a \in \{7, 8, 9\}$ olur. Ancak burada $a = 7$ ve $a = 9$ değerleri için b tam sayı değildir. $a = 8$ içinse $b = \frac{10a-68}{3} = 4$ olduğundan çözümler $A = (abc)_{10} = 842$ ve $B = (cba)_{10} = 248$ olarak bulunur.

54. 100 kağıdın iki yüzü tek ve çift olarak isimlendirilmiştir. Her kağıdın tek yüzüne tek, çift yüzüne çift olmak üzere iki ardışık tam sayı yazılmıştır. Ayrıca bu kağıtlarda 1'den 200'e kadar olan bütün tam sayılar kullanılmıştır. Bir A öğrencisi rastgele 21 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki sayıları toplayarak 913 buluyor. Bir B öğrencisi ise geri kalan kağıtlardan rastgele 20 kağıt çekiyor ve her iki taraflarındaki

sayıları toplayarak 2400 buluyor. Bu durumda

a) A nın toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.

a) Eğer A nın doğru toplamı 903 ise, B nin toplamının hatalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $i = 1, 2, \ldots, 100$ olmak üzere üzerinde $2i-1$ ve $2i$ yazan kağıda K_i diyelim. Bu durumda K_i kağıdındaki sayıların toplamı $T(K_i) = 4i - 1$ olur.

a) A öğrencisinin seçtiği kağıtlar $K_{j_1}, K_{j_2}, \ldots, K_{j_{21}}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
T_A &= (4j_1 - 1) + (4j_2 - 1) + \ldots + (4j_{21} - 1) \\
&= 4(j_1 + j_2 + \ldots + j_{21}) - 21 \\
&= 4(j_1 + j_2 + \ldots + j_{21} - 6) + 3 \\
&\equiv 3 \pmod 4
\end{aligned}$$

olur. Ancak $913 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan A öğrencisinin toplamı hatalıdır.

b) 21 kağıt için olası en düşük toplam

$$(T_A)_{min} = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 21) - 21 = 4\frac{21.22}{2} - 21 = 903$$

olur ve bu A öğrencisinin doğru toplamıdır. Dolayısıyla A öğrencisi $K_1, K_2, \ldots, K_{21}$ kağıtlarını seçmiştir. Bu durumda B öğrencisi geriye kalan $K_{22}, K_{23}, \ldots, K_{100}$ den 20 tanesini seçecektir. Ancak bu durumda B öğrencisinin toplamının olası en düşük değeri

$$\begin{aligned}
(T_B)_{min} &= 4(22 + 23 + \ldots + 41) - 20 \\
&= 4(21 + 1 + 21 + 2 + \ldots + 21 + 20) - 20 \\
&= 4.21.20 + 4(1 + 2 + \ldots + 20) - 20 \\
&= 1680 + 4.\frac{20.21}{2} - 20 \\
&= 1680 + 840 - 20 \\
&= 2500
\end{aligned}$$

olur. Yani B öğrencisinin toplamı hatalıdır.

55. $p^2 + 11$ sayısının 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olduğu tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm. $p = 2$ ise, $p^2 + 11 = 15 = 3 \cdot 5$ tir ve 4 tane pozitif böleni vardır. $p = 3$ ise, $p^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$ dir ve 6 tane pozitif böleni vardır. 3 ten büyük tüm p asal sayıları için $p^2 \pmod 3$ ve $\pmod 4$ te 1 e denk olduğu için $p^2 + 11$ sayısı 3 ve 4 ile tam bölünür. Bu bilgiler ışığında $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot a$ yazabiliriz.

$p \geq 11$ ise, $p^2 + 11 \geq 132$ dir. $a \geq 11$ için $p^2 + 11$ sayısının bölenlerinden 1, 2, 3, 4, 6, 12, $2a$, $3a$, $4a$, $6a$, $12a$ sayılarının birbirinden farklı olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla, $p \geq 11$ değerleri istenilen koşula uymamaktadır.

Şimdi p nin 5 ve 7 olduğu durumları inceleyeceğiz. $p = 5$ ise, $p^2 + 11 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ dir ve 9 tane pozitif böleni vardır. $p = 7$ ise, $p^2 + 11 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ dir ve 12 tane pozitif böleni vardır.

Sonuç olarak, sadece 2, 3 ve 5 asal sayıları için $p^2 + 11$ sayısı 11 den daha az pozitif bölenlere sahip olur.

56. İki ardışık sayının küplerinin farkı bir n tam sayısının karesi ise n nin iki ardışık sayının kareleri toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz. (Mesela, $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$ ve $13 = 2^2 + 3^2$ dir.)

Çözüm. Soruda verilen n sayısının karesini $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1 = n^2$ şeklinde yazabiliriz. Son eşitliğin her iki tarafını 4 ile çarparsak, $3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$ eşitliğini elde ederiz. a ve b aralarında asal iki sayı ise, $(2n-1)$ ve $(2n+1)$ sayıları aralarında asal olduklarından

- $2n - 1 = 3a^2$, $2n + 1 = b^2$
- $2n - 1 = a^2$, $2n + 1 = 3b^2$

durumları vardır. İlk durumda, $b^2 = 3a^2 + 2$ olacağından $b^2 \equiv 2 \pmod 3$ olur ama bu durum mümkün değildir.

İkinci durumda, a sayısı tek sayı olmalıdır. Eğer $a = 2k + 1$ dersek $2n - 1 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ olacaktır. Yani, $2n = 4k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + (k+1)^2)$ dir. Böylece, $n = k^2 + (k+1)^2$ bulunur.

57. $n \geq 1$ olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ olan ve $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1} + 1}$ koşulunu sağlasın.

a) Dizinin her teriminin bir pozitif tam sayı olduğunu gösteriniz.

b) $2a_n a_{n+1} + 1$ sayısının her $n \geq 1$ için bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm. a) Soruda verilen indirgemeli formül $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$ dir. Tümevarım kullanarak $k \leq n$ iken $a_k \in \mathbb{N}$ olmasının $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ yi gerektirdiğini göstereceğiz. $\forall k \leq n$ için $a_k \in \mathbb{N}$ ve ek olarak bu tür her k için $(a_k, a_{k-1}) = 1$ olduğunu tümevarım hipotezi olarak kabul edelim. $n = 2$ ve $n = 3$ durumları kolaylıkla hesaplanabileceğinden, $n \geq 4$ olsun.

$a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}$ bize $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}^4 - 2a_{n-1}^2 + 1 - a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2 a_{n-1}}$ eşitliğini verecektir. $a_{n-1}a_{n-3} + 1 = a_{n-2}^2$ ifadesinden, $a_{n-1} | a_{n-2}^2 - 1$ ve $a_{n-1} | a_{n-1}^4 - 2a_{n-1}^2 + 1 - a_{n-2}^2$ bulunur. Diğer taraftan, $a_{n-2}^2 | (a_{n-1}^2 - 1)^2 = a_{n-2}^2 a_n^2$ ve $(a_{n-2}, a_{n-1}) = 1$ olduğundan, $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ dir. $a_{n+1}a_{n-1} - 1 = a_n^2$ ifadesinden de $(a_n, a_{n+1}) = 1$ bulunacaktır. Bu da tümevarımı bitirir.

b) n sayısına küçük değerler verilerek $2a_na_{n+1}+1=(a_{n+1}-a_n)^2$ eşitliği kolaylıkla bulunabilir. Bu eşitliği tümevarımla kanıtlayacağız. $n=1$ durumu açıktır. $n\geq 2$ kabul edelim. Bu durumda

$$2a_na_{n+1}=a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2-1=a_{n+1}(a_{n+1}-2a_n)+a_{n+1}a_{n-1}$$

olacaktır. Her iki tarafı $a_{n+1}>0$ a bölerek, $4a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ ve $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$ elde edilir. $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ ilişkisini göstermek soruyu çözecektir. $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2-1}{a_n}$ olduğundan

$$4a_{n+1}a_n-a_n^2=a_{n+1}^2-1 \Leftrightarrow 2a_na_{n+1}+1=(a_{n+1}-a_n)^2$$

bulunur. Fakat bu bizim tümevarım hipotezimizdir.

58. $x+y$ ve xy birer pozitif tam sayı ve $x+y=xy$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x,y) irrasyonel sayı çifti bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. $n=x+y=xy$ olsun. Buradan $y=n-x$ elde edilir. Bulduğumuz y değerini bir önceki denklemde yerine yazarsak, $n=x(n-x)$ denklemini elde ederiz ki bu da bize, $x=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4n}}{2}$ eşitliğini verir.
$n\geq 5$ için,

$$n^2-6n+9<n^2-4n<n^2-4n+4 \quad \text{, yani} \quad (n-3)^2<n^2-4n<(n-2)^2$$

olduğundan n^2-4n, tam kare olmayan bir pozitif tam sayıdır. Bu durumda her $n\geq 5$ tam sayısı için $x=\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$ ve $y=\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$ irrasyonel sayıları istenen özelliği sağlar.

59. $(a_n)_{n\in N}$ dizisi şu şekilde verilmiş olsun

- $a_1=1$
- $a_n=\frac{4n-2}{n}a_{n-1}$, $n\geq 2$

Bu dizinin bütün terimlerinin pozitif tam sayı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Her $n\geq 2$ için

$$a_n=\frac{2(2n-1)}{n}a_{n-1}=\frac{2^2(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)}a_{n-2}=\ldots=\frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2}a_1$$

Pay ve paydayı $(n-1)!$ ile çarpıp $2^{n-1}(n-1)!=(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$ eşitliğini kullanarak $a_n=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}=\binom{2n-1}{n}\in Z$ elde edilir.

60. Üç öğrenci tahtaya yan yana, üç tane iki basamaklı tam kare yazıyor. Sonuçta oluşan altı basamaklı sayı da bir tam kare oluyorsa tahtaya yazılan sayı kaç olabilir?

Çözüm. x, y ve z tahtaya yazılan iki basamaklı sayılar, u^2 de oluşan altı basamaklı sayı olsun. x, y ve z sayıları iki basamaklı ve tam kare oldukları için 16, 25, 36, 49, 64 ya da 81 sayılarına eşit olabilirler. O halde $161616 \leq u^2 < 818181$'dir. Buradan da $402 \leq u \leq 904$ bulunur. $u = (abc)_{10}$ olsun. $b > 1$ olursa x tam kare olamaz. $b = 1$ durumunda ise sadece $410^2 < 170000$ şartı sağlandığından $a = 4$ olabilir. Yani iki durum vardır:

- $a = 4$ ve $b \in \{0, 1\}$
- $a > 4$ ve $b = 0$

$a = 4$ ve $b = 0$ ise $x = 16$ ve $8c \cdot 100 = 100y + z$ olur. Buradan $y = 16$, $c = 2$ ve $z = 4$ ya da $y = 64$, $c = 8$ ve $z = 64$ olur. Fakat z iki basamaklı olduğu için 4 olamaz. O halde $y = 64$, $c = 8$ ve $z = 64$'tür. $u = 408$, u^2 de 166464 olur.
Eğer $a = 4$, $b = 1$ ise $x = 16$, $y = 81$ ve $z = c \cdot (82c)$ olur. Fakat buradan elde edilecek z iki basamaklı bir tam kare olamayacağı için bir çözüm elde edilemez.
Eğer $a > 4$ ve $b = 0$ ise, $(200a + c)c = 100y + z$'dir. O halde $y = 2ac$ ve $z = c^2$ olur. $a > 4$ ve $c \geq 4$ olduğu için $y = 64$, $a = 8$, $c = 4$ ve $u = 804$, $u^2 = 646416$ elde edilir. Dolayısıyla tahtaya yazılan sayı 166464 veya 646416 olabilir.

61. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan, negatif olmayan bütün a, b, c, d tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $n = 0$ için çözümler $(2, 1, 1, 1)$ ve permütasyonlarıdır.

$n \geq 1$ iken $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod 4$ olur ve buradan da a, b, c, d nin hepsinin tek ya da hepsinin çift olduklarını görürüz. İki durum inceleyeceğiz.

a, b, c, d çift ise $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, $d = 2t$ olsun. Bu durumda denklem

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \cdot 4^{n-1}$$

şeklinde yazılır. Yani a, b, c, d sayılarını sürekli ikiye bölersek yeni çözümler elde ederiz. Sonuç olarak a, b, c, d sayılarının tek olduğu çözümleri aramamız gerekmektedir.

a, b, c, d tek ise $a = 2x + 1, b = 2y + 1, c = 2z + 1, d = 2t + 1$ olsun. Bu durumda denklem

$$4x(x + 1) + 4y(y + 1) + 4z(z + 1) + 4t(t + 1) = 4(7 \cdot 4^{n-1} - 1)$$

şeklinde yazılır. $n(n+1)$ çift olduğu için denklemin sol tarafı 8 in katıdır. Dolayısıyla $7 \cdot 4^{n-1} - 1$ çift olmalıdır ki bu sadece $n = 1$ durumunda mümkündür. Şimdi denklem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 28$ olur ve çözümler $(5, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 3, 1)$ ve bunların permütasyonları şeklindedir.

Sonuç olarak, bütün çözümler $(2^{n+1}, 2^n, 2^n, 2^n)$, $(3 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^n, 2^n)$, $(2^n, 2^n, 2^n, 5 \cdot 2^n)$ ve bunların permütasyonları şeklindedir.

62. $xy + yz + zx - xyz = 2$ denklemini sağlayan bütün (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm. Genelliği bozmadan $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. $x = 1$ için, $y + z = 2$ denklemi elde edilir. Bu durumda tek çözüm, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ olur. $x = 2$ için, $2y + 2z - yz = 2$, yani $(y - 2)(z - 2) = 2$ denklemi elde edilir. Buradan $z = 4$, $y = 3$ olduğundan, $x = 2$ için çözümler $(x, y, z) = (2, 3, 4)$ ve permütasyonlarıdır. $x \geq 3$ için, $y \geq 3$ ve $z \geq 3$ olacağından, $xyz \geq 3yz$, $xyz \geq 3xz$ ve $xyz \geq 3xy$ olur. Ancak buradan $xy + yz + xz - xyz \leq 0$ elde edildiğinden, bu durum için sonuç yoktur.

63. $\frac{2^{58}+1}{5}$ sayısının asal olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Öncelikle $\frac{2^{58}+1}{5}$ in tam sayı olduğunu gösterelim. $2^{58} = 2^2(2^4)^{14}$ ve $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{58} \equiv 4 \pmod 5$ tir. Her iki tarafa da 1 eklesek, $2^{58} + 1 \equiv 0 \pmod 5$ elde ederiz. Bu da 5 in $2^{58} + 1$ i tam böldüğünü gösterir.
Şimdi $2^{58} + 1$ i çarpanlarına ayıralım. $(2^{29} + 1)^2 = (2^{58} + 1) + 2^{30}$ olduğundan $2^{58} + 1$ iki kare farkı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} (2^{58} + 1) &= (2^{29} + 1)^2 - 2^{30} \\ &= (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 \\ &= (2^{29} + 2^{15} + 1)(2^{29} - 2^{15} + 1) \end{aligned}$$

Her iki çarpan da 5 ten büyük olduğu için, a ve b 1 den büyük pozitif tam sayılar olmak üzere, $2^{58} + 1 = 5ab$ dir. Dolayısıyla $\frac{2^{58}+1}{5}$ asal değildir.

64. $x + y + z = xyzt$ koşulunu sağlayan bütün pozitif x, y, z, t tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. Genellemeyi bozmadan $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. $x + y + z = xyzt$ eşitliğinde her iki tarafı da xyz ye bölersek

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = t$$

elde ederiz. Buradan $t \leq 3$ olması gerektiğini görürüz. Çözümü şu üç durumda inceleyelim:
$t = 3$ olursa $x = y = z = 1$ olmalıdır.
$t \leq 2$ olursa $x = 1$ olmalıdır. Bunu görmek için, $2 \leq x$ olduğunu kabul edelim. $2 \leq x \leq y \leq z$ eşitsizliğinden

$$t = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \leq \frac{3}{4}$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir. $x=1$ olmalıdır. Benzer şekilde $y=1$ olduğunu gösterelim. $2\leq y$ olduğunu kabul edelim. $2\leq y\leq z$ eşitsizliğinden

$$t=\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

olmak üzere bir çelişki elde ederiz. $x=1$, $y=1$ ise $2=1+\frac{2}{z}$ olmalıdır ve buradan da $z=2$ buluruz.
$t=1$ olursa $x=1$ olduğunu göstermiştik. $y\geq 3$ olduğunu kabul edelim. O zaman $z\geq 3$ olması gerektiği açıktır. Buradan

$$t\leq\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 1}=\frac{7}{9}$$

olmak üzere bir çelişki elde ederiz. $y\leq 2$ dir ve $y=1$ olamayacağı açıktır. Yani $y=2$ olmalıdır. $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{z}$ olduğundan $z=3$ bulunur.
İstenilen şartı sağlayan (x,y,z,t) lerin kümesi: $\{(1,1,1,3),(1,1,2,2),(1,2,3,1)\}$ ve permütasyonlarıdır.

65. $1,2,3,4,5,6,7$ sayılarının hepsi sadece bir kere kullanılarak bir x sayısı oluşturuluyor. x in basamaklarındaki rakamların yerleri değiştirilerek bir y sayısı elde ediliyor. y nin x i bölmediğini gösteriniz.

Çözüm. x ve y nin basamaklarının toplamı 28 dir. Buradan x ve y nin 9 a bölümlerinden kalanın 1 olduğunu buluruz. Başka bir deyişle, k_1 ve k_2 tam sayılar olmak üzere $x=9k_1+1$, $y=9k_2+1$ dir. y nin x i böldüğünü kabul edelim. Buradan, $m>1$ olmak üzere $9k_1+1=x=m(9k_2+1)=9mk_2+m$ elde ederiz. Basamakların yerleri değiştirildiği için $m\in\{2,3,4,5,6\}$ olmalıdır. $9k_1+1=x=9mk_2+m$ eşitliğinden dolayı bunun bir çelişki olduğu açıktır.

66. **a)** Her k tam sayısı için, $(2k+1)^3-(2k-1)^3$ in üç tam karenin toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.
b) n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $(2k+1)^3-2$ sayısının $3n-1$ tane 1 den büyük tam karenin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. a) $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$

$$\begin{aligned}
&= [2k+1-(2k-1)]\left[(2k+1)^2 + (2k+1)(2k-1) + (2k-1)^2\right] \\
&= 2\left[(2k+1)^2 + (2k+1)(2k-1) + (2k-1)^2\right] \\
&= 2(2k+1)^2 + 2(2k+1)(2k-1) + 2(2k-1)^2 \\
&= \left[(2k+1)^2 + 2(2k+1)(2k-1) + (2k-1)^2\right] + (2k+1)^2 + (2k-1)^2 \\
&= [(2k+1)+(2k-1)]^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2 \\
&= (4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2
\end{aligned}$$

b) $(2n+1)^3 - 2$ ifadesini $[(2n+1)^3 - 1] - 1$ şeklinde yazalım. Parantez içindeki ifadeye 1 ile $(2n+1)$ arasındaki bütün tek sayıların küplerini ekleyip çıkaralım ve aşağıdaki gibi sıralayıp gerekli düzenlemeleri yapalım.

$$\begin{aligned}
&= \left[(2n+1)^3 - (2n-1)^3 + \ldots + 3^3 - 1\right] - 1 \\
&= [(2n+1)^3 - (2n-1)^3] + \ldots + [5^3 - 3^3] + [3^3 - 1] - 1 \\
&= [(2n+1)^3 - (2n-1)^3] + \ldots + [5^3 - 3^3] + 4^2 + 3^2 + 1^2 - 1 \\
&= [(2n+1)^3 - (2n-1)^3] + \ldots + [5^3 - 3^3] + 4^2 + 3^2
\end{aligned}$$

Son bulunan ifadedeki köşeli parantezle gözterilen $n-1$ terimi 3 tam karenin toplamı olarak yazarsak sayıyı $3n-1$ tam karenin toplamı olarak ifade etmiş oluruz.

67. Genel terimi $n^3 - (2n+1)^2$ olan (a_n) dizisinde 2006'ya bölünebilen bir terim var mıdır?

Çözüm. Evet vardır. Öncelikle $a_4 = 4^3 - 9^2 = -17$ ve $a_7 = 7^3 - 15^2 = 118$ olduğunu gözlemleyelim. $n^3 - (2n+1)^2$ bir polinom olduğu için $a_{17k+4} \equiv a_4 \pmod{17}$ ve $a_{118l+7} \equiv a_7 \pmod{118}$ olur. 119 sayısı 17 ye tam bölündüğü için 118 sayısının 17'ye bölümünden kalan 16 olur. Dolayısıyla $361 = 7 + 118.3$ sayısının 17 ye bölümünden kalan 4 tür. Bu demek oluyor ki a_{361} sayısı hem 17 ye hem de 118 e tam bölünür, yani 2006 ya tam olarak bölünmektedir.

Not 1: 17 ve 118 sayıları aralarında asal olduğu için Çinli Kalan Teoremi bize $n \equiv 4 \pmod{17}$ ve $n \equiv 7 \pmod{118}$ olacak şekilde bir n sayısının olduğunu garanti eder.

Not 2: Verilen koşulları sağlayan en küçük sayı $n = 87$ için elde edilir, bu durumda $a_{87} = 627878 = 313.2006$ olur.

68. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını gösteriniz.

a) $n \geq 3$ olacak şekilde bütün n tam sayıları için, herhangi ikisinin çarpımı geri kalan $(n-2)$ tam sayının toplamıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

b) $n \geq 3$ olacak şekilde, bazı n tam sayıları için, herhangi $(n-2)$ tanesinin toplamı geriye kalan iki tam sayının çarpımıyla kalansız bölünecek şekilde n tane farklı pozitif tam sayı vardır.

Çözüm. **a)** Doğru. n tane sayıyı $(n^2)!$, $2(n^2)!$, $\ldots$, $n(n^2)!$ olarak alalım. Bu sayılardan herhangi iki tanesinin çarpımının $(n^2)!(n^2)!$ ile kalansız bölündüğü açıktır. Şimdi geriye kalan sayıların toplamına $k(n^2)!$ diyelim. Burada $k < 1+2+\ldots+n < n^2$ olduğundan, k tam sayısı $(n^2)!$'i böler. Dolayısıyla $k(n^2)!$ herhangi iki sayının çarpımını böler.
b)Yanlış. Herhangi bir n için, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ olan n adet tam sayıyı alalım. Bu durumda,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} = (n-2)a_{n-2}$$

elde edilir. Ancak öte yandan,

$$a_{n-1}a_n \geq (n-1)a_n > (n-2)a_{n-2}$$

olduğundan, $a_1+a_2+\ldots+a_{n-2} < a_{n-1}a_n$ olur ki bu durumda da $a_{n-1}a_n$ çarpımının $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}$ değerini bölemeyeceği açıkça görülür.

69. $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ olsun. $n > 1$ için, H_n in bir tam sayı olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. r, $2^r \leq n$ şartını sağlayan en büyük tam sayı olsun. $b = [2, 3, \ldots, n]$ dersek $b = 2^r \cdot s$ ve s tek sayı olur.

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{\frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \cdots + \frac{b}{2^r} + \cdots + \frac{b}{n}}{b} = \frac{a}{b}$$

olur. Paydaki tam sayılardan $\frac{b}{2^r}$ tek, diğerleri çifttir. Bu durumda a tek, b çift olur ve $\frac{a}{b}$ tam sayı olamaz.

70. x tam sayı olmayan, pozitif bir rasyonel sayı ise x^x in rasyonel olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $(a, b) = 1$ ve $b > 1$ olacak şekilde $x = \frac{a}{b}$ olsun. x^x in rasyonel olduğunu kabul edelim. Yani $c, d \in \mathbb{Z}$ ve $d \neq 0$ olmak koşulu ile, $x^x = \frac{c}{d}$ şeklinde yazılabilir. $x = \frac{a}{b}$ olduğundan,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b \Rightarrow a^a \cdot d^b = c^b \cdot b^a$$

elde edilir. $b > 1$ olduğundan, b nin en az bir p asal çarpanı vardır. O halde p ve u aralarında asal olmak koşulu ile, $r > 0$ için $b = p^r \cdot u$ şeklinde yazılabilir. Şimdi p

nin a, b, c ve d sayılarında bulunan kuvvetlerini inceleyelim:

$b^a : ra$ $\quad b = p^r \cdot u$ olduğu için $b^a = p^{ra} \cdot u^a$ olacaktır.

$a^a : 0$ $\quad a$ ve b aralarında asal sayılar olduğu için p, a^a nın bir böleni değildir.

$d^b : sb$ $\quad p|d$ olduğundan $d = p^s \cdot v$ ve $(v, p) = 1$ olacaktır.

$cb : 0$ $\quad$ Çünkü c ve d aralarında asal sayılardır.

Her sayı tek türlü asal çarpanlarına ayrılabileceğinden bulduğumuz eşitliğin her iki tarafındaki p nin kuvvetlerinin birbirlerine eşit olması gerekir, yani $ra = sb$ dir. Bu da b nin ra yı bölmesi demektir. a ve b aralarında asal oldukları için, b, r yi bölmek zorundadır. Bu ise, $r \geq b = p^r \cdot u \geq p^r$ olmasını gerektirir. Ancak $p > 1$ için $r \geq p^r$ olamaz. O halde baştaki kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla x^x, tam sayı olmayan bir x rasyonel sayısı için, rasyonel değildir.

71. m bileşik bir tam sayı olmak üzere, a, b, c, d pozitif tam sayıları için ab ve cd, m sayısının iki farklı çarpanlarına ayrılmış hali olsun ($m = ab = cd$). Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısının asal olmadığını gösteriniz.

    Çözüm. $a = ru$, $b = sv$, $c = rs$, $d = uv$ olacak şekilde r, s, u, v pozitif tam sayıları vardır. Buradan $a^n + b^n + c^n + d^n = r^n u^n + s^n v^n + r^n s^n + u^n v^n = (r^n + v^n)(s^n + u^n)$ eşitliğini yazabiliriz. Her $n \geq 0$ tam sayısı için $a^n + v^n$ ve $s^n + u^n$ sayıları 1 den büyüktür. Dolayısıyla $a^n + b^n + c^n + d^n$ sayısı asal değildir.

72. a, b ve c tam sayılar olmak üzere, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ denkleminin bütün çözümlerini bulunuz.

    Çözüm. $c = 0$ ise, $a^2 - 1 = \mp 1$ ve $b^2 - 1 = \mp 1$ olmalıdır. Bunun için de $a = 0$ ve $b = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $c > 0$ durumu için bir çözüm arıyoruz dersek genelliği kaybetmemiş oluruz.

    Şimdi $c > 0$ için denklemin bir çözümünün olduğunu kabul edelim. Eşitliği (mod 4)te düşünürsek, (mod 4)te bir sayının karesi ancak ve ancak 0 veya 1 olabileceğinden, $(a^2 - 1) \equiv -1, 0 (\text{mod} 4)$ ve $(b^2 - 1) \equiv -1, 0 (\text{mod} 4)$ elde edilir ve buradan da $(c^2 + 1) \equiv 1 (\text{mod} 4)$ bulunur. Yani, $(a^2 - 1) \equiv (b^2 - 1) \equiv -1 \pmod 4$ ve, $(c^2 + 1) \equiv 1 \pmod 4$ olur. Buradan da a, b ve c tam sayılarının çift tam sayılar olduklarını anlarız.

    a, b ve c çift tam sayılar olduklarına göre, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ olacak şekilde a_1, b_1, c_1 tam sayıları tanımlayabiliriz. Bu durumda, $4c_1^2 + 1 = (4a_1^2 - 1)(4b_1^2 - 1)$ elde ederiz. Bunu da sadeleştirirsek; $c_1^2 = 4a_1^2 b_1^2 - a_1^2 - b_1^2$ buluruz. Bu denklemi (mod4)te düşünürsek, a veya b den en az birisi tek sayı olursa $c_1^2 \equiv 2 \pmod 4$ ya da $c_1^2 \equiv 3 (\text{mod} 4)$ olur. Bu da mümkün olmadığı için a_1, b_1, c_1 tam sayıları da çift tam sayılardır.

    Şimdi de $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$ olacak şekilde a_2, b_2, c_2 tam sayıları tanımlayalım. Bu durumda, $c_2^2 = 16a_2^2 - a_2^2 - b_2^2$ elde ederiz ki bu denkleme de (mod 4)te bakarsak, a_2, b_2, c_2 tam sayılarının çift tam sayılar olduklarını görürüz.

Bu şekilde sonsuza kadar devam edebileceğimiz aşikardır. Dolayısıyla sonsuz bir azalan pozitif tam sayı dizisi elde ederiz: $c > c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > 0$. Ancak bu imkansızdır. Bu da demek oluyor ki baştaki $c > 0$ için denklemin bir çözümünün olduğu kabulümüz yanlıştır.

Sonuç olarak, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ denklemini sağlayan tek tam sayı değerleri $a = b = c = 0$ olur.

73. A kümesi 1 tam sayısını ve en az bir pozitif tam sayıyı daha içeren bir küme olsun. A kümesinden alınan her m ve n tam sayıları için $\frac{m+1}{(m+1,n+1)}$ tam sayısının da kümenin bir elemanı olduğu biliniyor. Bu durumda A kümesinin bütün pozitif tam sayıları içerdiğini gösteriniz.

Çözüm. a tam sayısı A kümesinin 1 den büyük en küçük elemanı olsun. Burada $m = a$ ve $n = 1$ için $y = \frac{a+1}{(2,a+1)} \in A$ olur. Burada $(2, a+1)$ değeri 1 ya da 2 olabileceğinden, $y = a + 1$ ya da $\frac{a+1}{2}$ olabilir.

Ancak $1 < \frac{a+1}{2} < a$ olduğundan, $y = a + 1$ olmalıdır. Şimdi $m = a + 1$ ve $n = a$ aldığımızda ise $\frac{a+2}{(a+2,a+1)} = a + 2 \in A$ buluruz. Dolayısıyla her $t \geq a$ için $t \in A$ olduğu açıkça görülür.

Bu durumda $m = 2a - 1$ ve $n = 3a - 1$ alalım. Burada $(m + 1, n + 1) = (2a, 3a) = a$ olduğundan $\frac{2a}{a} = 2 \in A$ olduğu görülür, dolayısıyla tanımından dolayı a=2 olmalıdır. Sonuç olarak A kümesinin bütün pozitif tam sayıları bulundurduğu açıkça görülür.

74. Herhangi bir pozitif n tam sayısı için $n! + 1$ ve $(n + 1)!$ in en büyük ortak bölenlerini bulunuz.

Çözüm. Eğer $n + 1$ asal bir sayı değilse o zaman $(n + 1)!$ i bölen bütün asal sayılar n den büyük olamaz yani $n!$ i de bölerler ve $n! + 1$ i bölemezler. Bu durumda $(n! + 1, (n + 1)!) = 1$ olur. Eğer $n + 1$ asal sayı ise o zaman yukarıdaki fikirden $(n! + 1, (n + 1)!) = (n + 1)^k$ olmalıdır. Wilson teoreminden $(n + 1)|(n! + 1)$ dir. $(n + 1)^2$, $(n + 1)!$ i bölemediğinden $(n! + 1, (n + 1)!) = n + 1$ olur.

75. $n|(2^n - 1)$ şartını sağlayan bütün pozitif n tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $n = 1$ sorudaki şartı sağladığından çözümler arasındadır. Şimdi $n > 1$ durumunu ele alalım ve bu durumda aslında çözüm olamayacağını gösterelim.

$n|(2^n - 1)$ olsun. $n > 1$ olduğu için, en az bir adet asal çarpanı vardır. Bunlardan en küçüğüne p diyelim. Ancak n tek sayı olduğundan $p > 2$ olur. $n|(2^n - 1)$ olduğundan $p|(2^n - 1)$ yani $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ elde edilir. Ayrıca Fermat Teoreminden $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ olur.

2 nin (mod p) deki derecesine d diyelim. $d|n$ ve $d|(p-1)$ olduğu açıktır. n nin en küçük asal böleni p olduğu için $(n, p-1) = 1$ dir. Buradan $d = 1$ olduğu görülür. $2^1 \equiv 1 \pmod p$ olduğundan çelişki elde edilir.

Sonuç olarak $n|(2^n - 1)$ şartını sağlayan tek pozitif tam sayı 1 dir.

76. $a^4 + 4b^4$ değerini asal sayı yapan bütün a, b pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = \left[(a+b)^2 + b^2\right]\left[(a-b)^2 + b^2\right] \end{aligned}$$

olduğunu görelim. Burada $(a+b)^2 + b^2 > 1$ olduğu için bu sayının bir asal sayı olabilmesi için $(a-b)^2 + b^2 = 1$ olmalıdır. Bu ancak $a = b$ ve $b = 1$ durumunda sağlanacağından($a^4 + 4b^4 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$ asal) , verilen özelliği sağlayan değerlerin yalnızca $a = b = 1$ olduğu görülür.

77. n bir tam sayı olmak üzere, $2^n + 3^n$ bir rasyonel sayının karesi olabilir mi?

Çözüm. Öncelikle n nin pozitif olduğu durumu inceleyelim. $2^n + 3^n = (-1)^n + 0 = (-1)^n (\mathrm{mod} 3)$ ve (mod 3) te bütün sayıların kareleri 0 ya da 1'e eşit olduğundan n nin çift olduğu sonucuna ulaşılır.
Pozitif bir m sayısı için $n = 2m$ olsun. $2^n + 3^n = 4^m + 9^m = (-1)^m + (-1)^m = \pm 2 (\mathrm{mod} 5)$ our. (mod 5) te bütün tam kareler 0,1 ya da 4' e eşit olabilirler. Yani bir tam kare (mod 5) te 2 ya da -2 ye eşit olamaz. Bu durumda $2^n + 3^n$, pozitif bir n tam sayısı için, bir tam kare değildir.
Negatif n değerleri için, pozitif bir m sayısı için $m = -n$ olsun.

$$2^n + 3^n = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{3^m} = \frac{2^m + 3^m}{6^m}$$

Pozitif bir d tam sayısı için, eğer $d|2^m + 3^m$ ve $d|6^m$ ise $d|2^m(2^m + 3^m) - 6^m = 2^{2m}$ olur. Aynı şekilde $d|3^{2m}$. Fakat 2^{2m} ve 3^{2m} aralarında asal sayılar olduğu için $d = 1$ olmak zorundadır. O halde $2^m + 3^m$ ve 6^m de aralarında asal sayılardır. Bu durumda $\frac{2^m+3^m}{6^m}$ nin tam kare olması için hem $2^m + 3^m$ hem de 6^m nin tam kare olması gerekir. Fakat pozitif bir n sayısı için $2^n + 3^n$'nin bir tam kare olmadığını göstermiştik. Bu yüzden $\frac{2^m+3^m}{6^m}$ bir tam kare olamaz.
$n = 0$ için de $2^n + 3^n$ bir tam kare değildir.
Dolayısıyla hiç bir n tam sayısı için $2^n + 3^n$ bir tam kare değildir.

78. $z^2 = (x^2 + 1)(y^2 - 1) + n$ denklemini:
a) $n = 2006$

b) $n = 2007$
durumlarında sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri var mıdır?

Çözüm. **a)** $n = 2006$ durumunda, verilen denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x^2 - y^2 + z^2 - x^2y^2 = 2005$$

Şimdi $x^2 - y^2 = 2005$ durumunu ele alalım. Bu durumda eşitliğin iki tarafını da çarpanlarına ayırırsak, $(x+y)(x-y) = 5 \cdot 401$ elde ederiz. Dolayısıyla çözümlerden biri olan $x+y = 401$, $x-y = 5$ değerlerini alalım. Bu iki denklemi beraber çözersek, $x = 203$, $y = 198$ değerlerini, ve $z = xy$ olarak alırsak $z = 203 \cdot 198 = 40194$ buluruz ve bu değerlerin verilen denklemi sağladığı açıktır.
b)
$$z^2 = (x^2+1)(y^2-1) + 2007$$

denklemini sağlayan x, y ve z tam sayı değerleri olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z^2 \equiv 0,\ 1$ ya da $4 \pmod 8$ olmasına rağmen denklemin diğer tarafı sadece 2, 5, 6 ya da 7 (mod 8) değerleri alabilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu denklemi sağlayan x, y, z tam sayı üçlüleri yoktur.

79. $a_0 = 3$ ve $n \geq 1$ için $a_n = 2 + a_0a_1 \dots a_{n-1}$ olarak tanımlanmış (a_n) dizisi için
a) Dizinin herhangi iki elemanının aralarında asal olduklarını ispatlayınız.
b) a_{2007} yi bulunuz.

Çözüm. **a)** a_0 tek sayı olduğu için dizinin bütün elemanları tek sayıdır. Dizinin herhangi iki elemanı a_k ve a_n alınsın ve $k < n$ olsun. m, a_k ile a_n nin bir ortak böleni olsun. Sorunun çözümü için $m = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a_n - 2 = a_0a_1 \dots a_{n-1}$ dir. $m|a_k$ olduğu için $m|a_0a_1 \dots a_{n-1}$ dir. $m|a_n$, dolayısıyla $m|2$ olmalıdır.
$m = 2$ ise a_k ve a_m çift sayılardır. Fakat dizinin elemanları tek sayılardı. Dolayısıyla $m = 1$ dir.
b) Denklemde $a_0a_1 \dots a_{n-2} = a_{n-1} - 2$ yazarsak,

$$2 + (a_{n-1} - 2)a_{n-1} = a_n,$$

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1 = a_n - 1,$$

$$(a_{n-1} - 1)^2 = a_n - 1$$

bulunur. Bilinen eşitlikler düzenlenirse,

$$a_n - 1 = (a_{n-1} - 1)^2 = (a_{n-2} - 1)^4 = \dots$$

$$= (a_{n-k} - 1)^{2^k} = \ldots = (a_0 - 1)^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Yani, $a_n = 2^{2^n} + 1$ olur . Dolayısıyla, $a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1$ bulunur.

80. p bir asal sayı olmak üzere $7p+3^p-4$ tam sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $p > 3$ asal sayısı için $m = 7p + 3^p - 4$ tam sayısının bir tam kare olduğunu kabul edelim. Yani bir $n \in \mathbb{Z}$ için $m = n^2$ olsun. Bu durumda Fermat Teoreminden $m = 7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 4 \equiv -1 \pmod p$ olduğu görülür. Ayrıca tekrar, Fermat Teoreminden dolayı, bir $k \in \mathbb{Z}$ için $p = 4k + 3$ ise $-1 \equiv m^{2k+1} \equiv m^{4k+2} \equiv n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olur ancak $p > 3$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır.
Bu durumda $m = 7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod 4$ olur. Ancak $2 \pmod 4$ bir tam kare olmadığından bu bir çelişkidir.
Sonuç olarak $p = 2$ için $m = 19$ ve $p = 3$ için $m = 44$ olur ancak bu sayıların tam kare olmadıkları açıktır.

81. $p.q$ nun $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ yu böldüğü bütün p, q asal sayılarını bulunuz.

Çözüm. p asal olduğundan $p|(5^p - 2^p)$ veya $p|(5^q - 2^q)$ olmalıdır. $p|(5^p - 2^p)$ durumunda $5^p - 2^p \equiv 0 \pmod p$ ve Fermat Teoreminden $p|(5 - 2)$ yani $p = 3$ olur. Aynı durum q için de geçerlidir. Genelliği bozmadan $p \geq q$ kabul edelim. $q = 3$ olursa $p|(5^3 - 2^3)$ yani $p|117$ bulunur. Buradan $p = 3$ ve $p = 13$ çözümleri elde edilir.

Şimdi $p|(5^q - 2^q)$, $q|(5^p - 2^p)$ ve $p \geq q > 3$ olsun. $5^p \equiv 2^p \pmod q$ olduğundan $a = 5 \cdot 2^{-1} \pmod q$ için $a^p \equiv 1 \pmod q$ elde edilir. Aynı zamanda Fermat Teoreminden $a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ olur. a nın $\pmod q$ daki derecesine d diyelim. $d|p$ ve $d|(q-1)$ olduğu açıktır. $(p, q-1) = 1$ olduğundan $d = 1$ olur. Buradan $a \equiv 1 \pmod q$ yani $5 \equiv 2 \pmod q$ ve $q = 3$ elde edilir.

Çözüm kümesi $(p, q) \in \{(3, 3), (3, 13), (13, 3)\}$ tür.

82. A kümesi,

- $a \in A$ ise a nın bütün pozitif bölenleri A kümesinin elemanıdır,
- a,$b \in A$ ve $1 < a < b$ ise $1 + ab \in A$ dır,

özelliklerini sağlayan pozitif tam sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesinin en az 3 elemanı varsa A=$\mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. 1 bütün tam sayıların böleni olduğu için A kümesinin elemanıdır. A kümesinden $1 < a < b$ koşulunu sağlayan a ve b elemanlarını alalım. a,b ve $1 + ab$ den en az bir tanesi çift olacağından 2 de A kümesinin elemanıdır.
$n \geq 6$ için tümevarım yapalım. $k = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ için $k \in A$ olsun. n tek ise, n'yi

$1 < 2 < p \in A$ olacak şekilde $n = 2k + 1$ olarak yazabiliriz. İkinci koşulu sağladığı için $n \in A$ olur. Eğer n çift ise $n = 2p$ olarak yazabiliriz. Yukarıda ispatladığımız gibi $2p + 1 \in A$ dır. p yerine $p - 1$ yazarak $2p - 1$ in A nın elemanı olduğunu gösterebiliriz. $1 + (2p - 1)(2p + 1) = 4p^2 \in A$. İlk koşuldan $n = 2p \in A$ olur.

3, 4 ve 5 in A nın elemanı olduğunu göstermek için A kümesinden $a \neq 2$ koşulunu sağlayan bir a elemanı alalım. İkinci koşuldan $1 + 2a \in A$ olur. $1 + 2(1 + 2a) = 3+4a \in A$ ve $1+(1+2a)(3+4a) = 4+10a+8a^2 \in A$ dır. Eğer a çift ise $4|4+10a+8a^2$. O halde $4 \in A$ dır. a tek ise $a = 4 + 10a + 8a^2$ seçersek tekrar $4 \in A$ elde ederiz. $1 < 2 < 4 \in A$ olduğundan $1 + 2 \cdot 4 = 9 \in A$ olur. Bu da birinci koşuldan $3 \in A$ yı gerektirir. Son olarak $7 = 1 + 2 \cdot 3 \in A$, $1 + 2 \cdot 7 = 15 \in A$ olur. Birinci koşuldan dolayı 5, A kümesinin elemanıdır.

83. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004}$ denkleminin, tam sayılar kümesinde $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$ koşuluna uyan tam olarak iki çözümü olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. (x, y, z, t) nin bir çözüm olduğunu kabul edelim. a tekse $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, çiftse $a^2 \equiv 0, 4 \pmod 8$ olur. Bu yüzden x, y, z ve t den bir tanesi tek olduğu zaman hiç bir x, y, z ve t için $x^2+y^2+z^2+t^2$, 8 e bölünemez. Fakat, 2^{2004}, 8 ile bölündüğü için denklemin tek sayılarda çözümü yoktur.

Dolayısıyla, x, y, z ve t çift sayılar olmalıdır. Bu yüzden, $0 \leq x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq t_1$ tam sayılar olmak üzere $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $t = 2t_1$ ve $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = 2^{2002}$ 'dir. Benzer işlemler yapılarak, $0 \leq x_2 \leq y_2 \leq z_2 \leq t_2$ tam sayılar olmak üzere $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $t_1 = 2t_2$ ve $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 = 2^{2002}$ olur.

Bu işlemler tekrarlanarak, $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ tam sayılar ve $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ olmak üzere, $x = 2^{2001}a$, $y = 2^{2001}b$, $z = 2^{2001}c$, $t = 2^{2001}d$ elde edilir. Bu bağıntılar, $a = b = c = d = 1$ veya $a = b = c = 0$, $d = 2$ olduğunu gösterir.

Çözümler $(0, 0, 0, 2^{1002})$ ve $(2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001})$ dir.

84. En az iki eleman içeren ve $a, b \in A$, $a > b$ ise $\frac{okek(a,b)}{(a-b)} \in A$ koşulunu sağlayan negatif olmayan sayılar kümesi A yı düşünelim. A nın en fazla iki eleman içerebileceğini gösteriniz.

Çözüm. İlk olarak A nın sonlu olduğunu göstereceğiz. A kümesinin en küçük elemanı $\min A$ ve en büyük elemanı $\max A$ ile gösterilmek üzere, eğer $b = \min A$ ve $a \in A - \{b\}$ ise $(a - b)|[a, b]$ olacağından $(a - b)|ab$ dir. $(a - b)|(a - b)$ her zaman doğru olduğundan, $(a - b)|ab - b(a - b)$ olacaktır. Bu da bize $(a - b)|b^2$ ve $a \leq b + b^2$ ifadelerini verir. $a \in A$ rastgele seçildiğinden A sonlu bir kümedir.

$a = \max A$ ve $b = \min A$ olsun. Eğer $d = (a, b)$ ise $b = dx$ ve $a = dy$ koşullarını sağlayan ve $(x, y) = 1$ olan $x, y \in \mathbb{Z}^+$ elemanları vardır. Bu durumda $\frac{okek(a,b)}{(a-b)} = \frac{xy}{y-x} \in \mathbb{Z}^+$ olacaktır. x, y ve $x - y$ aralarında asal olduklarından, $y - x = 1$ veya $y =$

$x+1$ bulunur. Bu durumda $a = d(x+1)$ ve $b = dx$ olacağından, $\frac{[a,b]}{a-b} = x(x+1) \in A$ bulunur. Başka bir deyişle, $b \le x(x+1) \le a$ veya $d \in \{x, x+1\}$dir.
$d = x$ olsun. Bu durumda $a = x(x+1)$ ve $b = x^2$ dir. A nın başka bir elemanı olmadığını göstereceğiz. Tersini varsayarsak, eğer $c = \min(A - \{b\})$ ise $a = \widehat{d}(z+1)$ ve $c = \widehat{d}z$ olacak şekilde $\widehat{d}, z \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\frac{[a,c]}{a-c} = z(z+1) \in A$ dır. $z(z+1) \neq x^2 = b$, veya $c \le z(z+1) \le a$ olduğundan $\widehat{d} \in \{z, z+1\}$ bulunur. Eğer $\widehat{d} = z$ ise $a = z(z+1)$ dir. $a = x(x+1)$ olduğundan $x = z$ bulunur, bu bir çelişkidir (son ifade $b = c$ yi verir). Eğer $\widehat{d} = z+1$ ise $a = (z+1)^2$ ve $a = x(x+1)$ olacaktır, bu da bir çelişkidir. Böylece, A nın sadece iki elemanı olduğu bulunur.
Şimdi $d = x+1$ olsun. $a = (x+1)^2$ ve $b = x(x+1)$ dir. Önceki durumda olduğu gibi A nın bunların dışında başka bir elemanı olmadığı gösterilebilir.

85. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n nin basamakları toplamını $s(n)$ ile gösterelim. $s(n)$ nin n den farklı, n yi bölen en büyük tam sayıya eşit olduğu bütün n değerlerini bulunuz.

Çözüm. Cevap 18 ve 27 sayılarıdır. n nin basamak sayısını k ile gösterelim. Problemin çözümünde şu gözlemlerden faydalanılacaktır:

- $n = p \cdot s(n)$, p bir asal sayıdır. Bu yüzden $s(n)$ sayısının herhangi bir asal böleni p'den büyük ya da p'ye eşittir.
- p asal sayısı $s(n)$'den küçük olduğu için $s(n)^2 \ge n$'dir. n sayısının k tane basamağı olduğu için $10^{k-1} \le n$'dir. Dolayısıyla $10^{k-1} \le s(n)$'dir. Ayrıca $s(n)$ sayısı k tane rakamın toplamından oluştuğu için $s(n)$ en fazla $9k$ olabilir. Bütün bunları birleştirdiğimizde $10^{k-1} \le s(n)^2 \le (9k)^2$ elde edilir. $k = 5$ için bu eşitsizlik yanlıştır çünkü $10^4 > 45^2$'dir ve k'nın değerinin 5'ten büyük seçmek bu durumu değiştirmeyecektir. Dolayısıyla $k \le 4$ olmalıdır.

Şu iki durumu inceleyeceğiz:
Eğer $k = 4$ ise $n = abcd$'dir. Bu durumda $n \le s(n)^2 \le 36^2 = 1296$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Buradan $a = 1$ elde edilir. $s(n) \le 9k$ eşitsizliğinden dolayı $s(n) \le 28$'dir. İkinci gözlemimizdeki $s(n)^2 \ge n$ essşitsizliğinden dolayı $n \le 28^2$ elde edilir fakat $28^2 < 1000$ olduğu için n 4 basamaklı bir sayı olamaz. Bu çelişki yüzünden $k = 4$ iken bir çözüm yoktur.
Eğer $k \le 4$ ise $n = abc$'dir. İlk gözlemdekii eşitlik kullanılarak $100a + 10b + c = p(a+b+c)$ eşitliği bulunur. Buradan $9(11a+b) = (p-1)(a+b+c)$ eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı 9'un katı olduğu için eşitliğin sağ tarafı 9 tarafından bölünebilmelidir. $s(n)^2 \ge n$ olduğu için $p \le s(n)$'dir. $s(n)$'in alabileceği en büyük değer 27 olduğu için $p \le 27$'dir. Dolayısıyla $p-1$ sayısı 9'un bir katıysa eğer, p asal sayısı 19dur. Bu durumda üsteki eşitlikte p yerine 19 koyarsak $9a = b + 2c$ eşitliğini elde ederiz. Buradan $a \le 3$ olduğu bulunur. Yaptığımız $s(n)$ sayısının herhangi bir

asal böleni p'den büyük ya da p'ye eşittir gözleminden dolayı, $a+b+c$ toplamı en az 19 olmalıdır. a yerine sırasıyla $1,2,3$ değerleri konduğunda $a+b+c=19$ ve $9a=b+2c$ eşitliklerinin ikisini birden sağlayan bir a,b,c üçlüsünün bulunamayacağı görülebilir. Dolayısıyla $a+b+c\geq 23$ olmalıdır çünkü 19'dan büyük olan en küçük asal sayı 23'tür. Fakat $a\leq 3$ olduğu için bu mümkün değildir. Dolayısıyla 9'un $p-1$'i böldüğü durumlarda çözüm yoktur.
Eğer $p-1$ sayısı 9'a bölünmüyorsa, $a+b+c$ sayısı 3'e bölünmek zorundadır. İlk gözlemimiz nedeniyle p asal sayısı ya 2 ya da 3 olabilir.
Eğer $p=3$ ise $n=3(a+b+c)$. Buradan $n\leq 100$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $a=0$ ve $10b+c=3(b+c)$ eşitlikleri bulunur. Buradan $7b=2c$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden $n=27$ çözümü bulunur.
Eğer $p=2$ ise $n=2(a+b+c)$. Bu durumda da $a=0$ olduğu için $8b=c$. Buradan $n=18$ çözümü elde edilir.

86. P katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun ve $P(5)=2005$ denklemini sağlasın. Bu durumda $P(2005)$ sayısının bir tam sayının karesi olması mümkün müdür?

Çözüm. $P(x)$ katsayıları tam sayılardan oluşan bir polinom olsun. Bu durumda $(x-y)|(P(x)-P(y))$ olduğundan $2000|(P(2005)-P(5))$ yani $P(2005)=2000A+2005$ elde edilir. Buradan $P(2005)$ in son iki basamağının 05 olduğu bulunur. Yani $P(2005)$ 5 ile bölünür fakat 25 ile bölünmez. Bu da bize $P(2005)$ in bir tam sayının karesi olmadığını gösterir.

87. a bir tam sayı olsun. $x^2<3$ koşulunu sağlayan herhangi bir x reel sayısı için, $\sqrt{3-x^2}$ ve $\sqrt[3]{a-x^3}$ sayılarından en az birinin irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $A=\sqrt{3-x^2}$ ve $B=\sqrt[3]{a-x^3}$ sayılarının ikisi de rasyonel sayılar olsunlar. Yani, $x^2=3-A^2$ ve $x^3=a-B^3$ olur. Buradan da

$$a-B^3=\pm(3-A^2)\sqrt{3-A^2}$$

elde edilir. Denklemin sol tarafı bir rasyonel sayı olduğu için, $\sqrt{3-A^2}=k$ bir rasyonel sayı olmalıdır. A ve k birer rasyonel sayı oldukları için, $A=\frac{y}{t},k=\frac{z}{t}$ ve $(y,z,t)=1$ olacak şekilde y,z,t tam sayıları bulunabilir. $A^2+k^2=3$ olduğu için, $y^2+z^2=3t^2$ dir. Bu eşitliğin sağ tarafı 3 ün katı olduğu için, y^2+z^2, 3 ün katı olmalıdır. Aslında 3 hem y yi hem de z yi bölmelidir. (Her hangi bir tam sayının karesinin 3 ile bölümünden kalanın 0 veya 1 olduğuna dikkat ediniz.) Bu durumda $y^2+z^2=3t^2$ eşitliğinin sol tarafı 9 ile bölünür, yani t, 3 ile bölünür. Fakat, $(y,z,t)=1$ olduğu için bir çelişki elde ederiz. Dolayısıyla, A ve B nin ikisi birden rasyonel sayı olamazlar.

88. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$ denkleminin her iki tarafını 4 ile çarpıp 1 ekleyelim ve $9^x = (3^x)^2$ yazarsak

$$4((3^x)^2 - 3^x) + 1 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1$$

elde edilir. Bu denklem $t = 3^x$ olmak üzere

$$(2t-1)^2 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1$$

şeklinde yazılabilir.

$$4y^4 + 8y^3 + 4y^2 < 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1 \leq 4y^4 + 8y^3 + 8y^2 + 4y + 1$$

olduğu açıktır. O halde

$$(2y^2 + 2y)^2 < 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1 \leq (2y^2 + 2y + 1)^2$$

olur. Buradan $(2t-1)^2 = (2y^2+2y+1)^2$ ve $4y^2 - 4y = 0$ bulunur. $y = 0$ veya $y = 1$ olabilir. $y = 0$ için $t = 3^x = 1$ ve $x = 0$ bulunur. $y = 1$ için de $t = 3^x = 3$ ve $x = 1$ elde edilir. Bu durumda çözüm kümesi $(x, y) = \{(0,0), (1,1)\}$ olarak bulunur.

89. $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ ifadesini rasyonel yapan n tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $a \geq 0$ ve $b > 0$ aralarında asal tam sayılar olmak üzere, $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}} = \frac{a}{b}$ olsun. Her iki tarafın da karesini alırsak $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{a^2}{b^2}$ olur. Buradan

$$n = \frac{2b^2 + 5a^2}{4b^2 - a^2} = -5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}, \quad 4b^2 - a^2 \neq 0$$

elde edilir. a ve b aralarında asal sayılar olduğu için $4b^2 - a^2$ ile b^2 de aralarında asaldır. Bunu görmek için bir $d \neq 1$ tam sayısının $4b^2 - a^2$ ve b^2 yi böldüğünü varsayalım. d, $4b^2 - a^2$ ve b^2 yi böldüğü için $4(b^2) - (4b^2 - a^2) = a^2$ yi de böler. d, a^2 ve b^2 yi böldüğü için a^2 ile b^2 aralarında asal değildir. Fakat a ve b aralarında asal olduğu için a^2 ve b^2 aralarında asal olmak zorundadır. Dolayısıyla böyle bir d sayısı yoktur. $4b^2 - a^2$ ile b^2 aralarında asaldır.
$-5 + \frac{22b^2}{4b^2 - a^2}$ bir tam sayıya eşit olduğu için ve b^2 ile $4b^2 - a^2$ aralarında asal oldukları için, $4b^2 - a^2$, 22'yi bölmek zorundadır. Yani $4b^2 - a^2 \in \{-22, -11, -1, 1, 11, 22\}$ olur. Bir tam sayının karesi (mod 4) te 0 yada 1'e eşit olabilceği için $4b^2 - a^2$ (mod 4) te ya 0 ya da 3'e eşittir. O halde $4b^2 - a^2$ ya -1 ya da 11'e eşit olabilir.
Eğer $4b^2 - a^2 = -1$ ise $(2b - a)(2b + a) = -1$ olur. a ve b pozitif tam sayılar olduğu

için $2b-a=-1$, $2b+a=1$ olmak zorundadır. Bu iki denklemden $b=0$, $a=1$ elde edilir. Fakat $b>0$ olduğu için $4b^2-a^2\neq -1$ olur.
$4b^2-a^2=11$ ise $(2b-a)(2b+a)=11$ olur. Buradan $2b-a=1$, $2b+a=11$ elde edilir. Bu iki denklemden de $b=3$ ve $a=5$ bulunur. a ve b yi yerine yazarsak

$$n=-5+\frac{22b^2}{4b^2-a^2}=\frac{22\cdot 9}{4\cdot 9-25}=13$$

elde edilir.

90. Negatif olmayan hiç bir n tam sayısı için $a_n=2^n+3^n+5^n+6^n$ ifadesinin bir tam küp olamayacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Sorunun çözümü için modüler aritmetik kullanacağız.

$$(7x+1)^3\equiv(7x+2)^3\equiv(7x+4)^3\equiv 1 \pmod 7$$

ve

$$(7x+3)^3\equiv(7x+5)^3\equiv(7x+6)^3\equiv -1 \pmod 7$$

olduğu için, bir tam küp ifadesi $7m, 7m-1$ veya $7m+1$ şeklindedir. Fermat teoreminden, $2^{6k}\equiv 3^{6k}\equiv 5^{6k}\equiv 6^{6k}\equiv 1 (\text{mod } 7)$ olur. Her $n\geq 0$ için $a_n=2^n+3^n+5^n+6^n$ olsun. Şimdi $n=6k+r, r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ şeklinde yazılır. $2^n\equiv 2^r \pmod 7, 3^n\equiv 3^r \pmod 7, 5^n\equiv 5^r \pmod 7, 6^n\equiv 6^r \pmod 7$ olduğu için $a_n\equiv a_r \pmod 7$ dir.

$a_0\equiv a_2\equiv a_5\equiv a_6\equiv 4 \pmod 7, a_1\equiv a_4\equiv 2 \pmod 7$ ve $a_3\equiv 5 \pmod 7$ olduğu için, a_n bir tam küp olamaz.

91. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$$

sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. İstenen değere d diyelim. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2^{2n} &= (1+1)^{2n}-(1-1)^{2n} \\ &= 2\left(\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}\right) \end{aligned}$$

yani,

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1}$$

olduğu için, $d|2^{2n-1}$ ve d ikinin bir kuvvetidir.

Şimdi bir m tek tam sayısı için, $n = 2^k m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d|2^{k+1}$ çünkü d tam sayısı $2n$'i böler. Ancak, her $j = 1, \ldots, n$ için,

$$\binom{2n}{2j-1} = \frac{2n}{2j-1}\binom{2n-1}{2j-2}$$

olduğu ve $2j-1$ tek sayı olduğundan $2^{k+1}|\binom{2n}{2j-1}$. Dolayısıyla $2^{k+1}|d$ yani $d = 2^{k+1}$ bulunur.

92. $a_n = \left[n\sqrt{2}\right] + \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan dizinin sonsuz tane tek ve sonsuz tane çift sayı içerdiğini gösteriniz.

Çözüm. $x_n = \left[n\sqrt{2}\right]$, $y_n = \left[n\sqrt{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n \in \{1, 2\}$ olur.
Çelişki metodunu uygulamak için, $n \geq k$ özelliğindeki tüm a_n elemanlarının aynı paritede olmasını sağlayacak bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2 \leq a_{n+1} - a_n \leq 4$ olduğundan her $n \geq k$ için $a_{n+1} - a_n \in \{2, 4\}$ olduğunu görürüz. Eğer $a_{n+1} - a_n = 2$ ise $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 1$ ve eğer $a_{n+1} - a_n = 4$ ise $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n = 2$ olur.
Bu nedenle her $n \geq k$ için $x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - y_n$ olur ve buradan her $n \geq k$ için $y_n - x_n = y_k - x_k$ olur.
Fakat her n için $y_n - x_n > n\sqrt{3} - 1 - n\sqrt{2}$ ve dolayısıyla her $n \geq k$ için

$$n < \frac{y_k - x_k + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

olur ve bu bir çelişkidir.

93. x ve y sayıları 5'ten büyük asal çarpanı olmayan pozitif tam sayılar olmak üzere, $k \geq 0$ olan bir k tam sayısı için $x^2 - y^2 = 2^k$ denklemini sağlayan bütün x, y çiftlerini bulunuz.

Çözüm. Pozitif karelerin farkı en az 3 olabileceğinden, $k = 0$ ve $k = 1$ için çözümün olmadığı açıkça görülmektedir. Burada x ve y tam sayılarının beraber çift sayı olmadıkları durumu incelemek yeterlidir çünkü bu durumda sayıları ikiye böler, k'dan da 2 çıkarır ve yine x ve y'nin beraber çift sayı olmadığı durumu elde edebiliriz.
Şimdi $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ olduğundan, $m > n$ olmak üzere $x+y = 2^m$, $x-y = 2^n$ diyebiliriz. Buradan $x = 2^{m-1} + 2^{n-1}$, ve $y = 2^{m-1} - 2^{n-1}$ elde ederiz ki burada x ve y beraber çift sayı olmadığından $n = 1$ olur. Yani x ve y tek tam sayılar olur.
Dolayısıyla artık $x = 3^{x_1} 5^{x_2}$ ve $y = 3^{y_1} 5^{y_2}$ olduğunu biliyoruz. Ancak $x - y = 2$ olduğundan, x ve y beraber 3 veya 5'in katı olamaz. Yani uygun a ve b tam sayıları için ya $x = 3^a$, $y = 5^b$, ya da $x = 5^a$, $y = 3^b$ olur.
Eğer $x = 3^a$, $y = 5^b$ ise, $5^b = 2^{m-1} - 1$ denklemi elde edilir ki bu denklemin çözümü

$2^{m-1} - 1 \equiv 1 \pmod 4$ modüler denkleminin çözümüne eşittir. Buradan da çözüm $m-1=1$, yani $y=1$ olarak bulunur. Buradan $x=3$ olarak bulunacağından bu durum bize, $x = 3 \cdot 2^t$, $y = 2^t$ çözüm kümesini verir.
Öte yandan eğer $x = 5^a$, $y = 3^b$ ise, $3^b = 2^{m-1} - 1$ denklemi elde edilir ki bu denklemin çözümü $2^{m-1} - 1 \equiv 1$ ya da $3 \pmod 8$ modüler denkleminin çözümüne eşittir. Buradan da çözüm $m-1=1$ ya da 2, yani $y=1$ ya da 3 olarak bulunur.
Burada $y=1$ ise, $x=3$ olur ki bu 5^a şeklinde değildir.
$y=3$ durumunda ise, $x=5$ olur yani bu durum bize, $x = 5 \cdot 2^t$, $y = 3 \cdot 2^t$ çözüm kümesini verir.
Bunlardan başka çözüm yoktur. Dolayısıyla tüm çözümler, $(x,y) = (3 \cdot 2^t, 2^t)$ ve $(x,y) = (5 \cdot 2^t, 3 \cdot 2^t)$ olarak bulunur.

94. Binler basamağı aynı olan ve dört tanesi, beşinin toplamını bölen dört basamaklı birbirinden farklı tam sayı beşlilerini bulunuz.

Çözüm. Sayılara x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; binler basamağına a, sayıların toplamlarına ise S diyelim. Bu durumda $1000a \le x_i < 1000(a+1)$ olduğu için

$$x_i + 4000a \le S < x_i + 4000(a+1)$$

ve buradan da,

$$1 + \frac{4000a}{x_i} \le \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{4000(a+1)}{x_i}$$

elde edilir. Yukarıda x_i için bulduğumuz değerleri kullanarak

$$1 + \frac{4a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 5 + \frac{4}{a}$$

elde edilir. Burada $a \ge 2$ ise $\frac{11}{3} < \frac{S}{x_i} < 7$ elde edilir ancak $\frac{S}{x_i}$ için dört farklı tam sayı değeri gerektiğinden bu durumun olamayacağı açıktır.
Dolayısıyla $a = 1$ ve $3 < \frac{S}{x_i} < 9$ olmalıdır. Bu durumda $\frac{S}{x_i}$ ancak 4, 5, 6, 7 ve 8 değerlerini alabilir. Ancak sayıların binler basamağı eşit olduğu için herhangi ikisinin oranı her zaman ikiden küçük olacağından, $\frac{S}{x_i}$ bir beşli grup için 4 ve 8 değerlerini birlikte alamaz. Dolayısıyla $\frac{S}{x_i}$ için olasılıklar 5, 6, 7, 8 ya da 4, 5, 6, 7 olur.
Birinci durumda $S = 840k$ olur. Fakat burada x_i değerleri $168k$, $140k$, $120k$, $105k$ ve $307k$ olacağından ve $\frac{307k}{105k} > 2$ olduğundan bu durum bize istenilen sayıları vermez.
Diğer durumda ise $S = 420k$ olur. Yani x_i değerleri $105k$, $84k$, $70k$, $60k$ ve $101k$ olur. Burada $105k < 2000$ ve $60k \ge 1000$ eşitsizliklerinden, $17 \le k \le 19$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu durumlarda da istenen tam sayı beşlileri

$$\{1020, 1080, 1140, 1190, 1260, 1330, 1428, 1512, 1596, 1717, 1818, 1919, 1785, 1890, 1995\}$$

olur.

95. $n^2 + 3^n$ sayısını tam kare yapan bütün pozitif tam sayıları bulunuz.

Çözüm. m sayısı, $m^2 = n^2 + 3^n$ eşitliğini sağlayan bir pozitif tam sayı olsun. $(m-n)(m+n) = 3^n$ olduğu için $m - n = 3^k$ ve $m + n = 3^{n-k}$ eşitliklerini sağlayan bir $k \geq 0$ sayısı vardır. $m-n < m+n$ olduğu için $3^k < 3^{n-k}$ olur. Buradan $k < n-k$ yani $n - 2k \geq 1$ elde edilir.
Eğer $n - 2k = 1$ ise

$$2n = (m+N) - (m-n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k(3^{n-2k} - 1) = 3^k(3^1 - 1) = 2 \cdot 3^k$$

olur. Buradan $n = 3^k = 2k + 1$ elde edilir. $m \geq 2$ için tümevarım ile $3^m > 2m + 1$ elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik sadece $k = 0$ ve $k = 1$ için geçerlidir. $k = 0$ iken $n = 1$, $k = 1$ iken $n = 3$ olur.
Eğer $n - 2k > 1$ ise $n - 2k \geq 2$ yani $k \leq n - k - 2$ olur. Yine $m - n < M + n$ eşitsizliği kullanılarak $3^k \leq 3^{n-k-2}$ elde edilir. Buradan

$$2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8 \cdot 3^{n-k-2}$$

elde edilir. Tümevarım kullanarak da

$$8 \cdot 3^{n-k-2} \geq 8[1 + 2(n-k-2)] = 16n - 16k - 24$$

bulunur. Bu iki eşitsizlik kullanılarak $2n \geq 16n - 16k - 24$, yani $8k + 12 \geq 7n$ elde edilir. $n \geq 2k+2$ olduğu için $7n \geq 14k + 14$ olur fakat bu $8k + 12 \geq 7n$ eşitsizliği ile çelişir.
Dolayısıyla n sadece 1 ve 3 değerlerini alabilir.

96. $2^m + 3^n = k^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayıları bulunuz.

Çözüm. $m = 0$ için $n = 1$; $n = 0$ için ise $m = 3$ olmalıdır. Bu yüzden $m, n > 0$ şeklindeki çözümleri arıyoruz. $2^m + 3^n = k^2$ olduğundan, $(2,k) = (3,k) = 1$ sağlanır. Bu yüzden $k = 6s \pm 1$, dolayısıyla da $2^m + 3^n = 36s^2 \pm 12s + 1$'dir. Buradan $2^m \equiv 1(\text{mod}3)$ ve m'nin çift olduğu çıkar. Oradan da $3^n \equiv 1(\text{mod}4)$ ve n'nin çift olduğu anlaşılır. $m = 2M$, ve $n = 2N$ yazarsak denklemimiz $(2^M)^2 + (3^N)^2 = k^2$ ifadesine dönüşür. Pisagor eşitliğinin genel çözümüne göre, aralarında asal, 2 modunda farklı ve $2^M = 2xy$, $3^N = x^2 - y^2$, $k = x^2 + y^2$ eşitliklerini sağlayan x, y sayıları bulunabilir. $xy = 2^{M-1}$, $M > 1$ olduğundan $x = 2^u$, $y = 2^v$, $u + v > 0$, ve $u > v$ elde edilir. $2^u - 2^v = 3^r$ ifadesinden de $v = 0$ olduğu anlaşılır. $2^u + 2^v = 2^u + 1 = 3^s$ ve $2^u - 1 = 3^r$ sayesinde $2^{u+1} = 3^r(3^{s-r} + 1)$, dolayısıyla da $r = 0$ ve $x = 2^u = 2$ doğrulanır. Böylece $M = 2$, $N = 1$, $m = 4$, $n = 2$, ve $k = 5$ olduğu açığa çıkar.

97. Birler basamağı başa alındığında (örnek: $1234 \rightarrow 4123$) elde edilen sayıyı kalansız bölen, en az iki basamaklı ve rakamlarının hepsi birbirinin aynısı olmayan en küçük sayıyı bulunuz. (Bahsi geçen sayılar onluk sisteme göre yazılmış ve başında 0 olmayan sayılardır.)

Çözüm. Söz konusu sayıya s diyelim ve n basamaklı olduğunu kabul edelim. Buna göre $s = a_1a_2a_3\ldots a_n$ olsun. Birler basamağı başa alındığındaki haline ise t diyelim. Şimdi, s, t sayısının bir böleni olduğuna göre bir k tam sayısı için $t = a_na_1a_2\ldots a_{n-1} = ks$ olsun. Burada dikkat edilmesi gereken hususlar, sayının başında 0 olamayacağından $a_1 > 0$ olması gerektiği ve birler basamağı başa alındığında elde edilen sayının daha büyük olması için de $a_n > 1$ olması gerektiğidir.
Tekrar eden s lerin oluşturduğu devirli ondalıklı sayıya x, t'lerin oluşturduğu devirli ondalıklı sayıya ise y diyelim. Yani $x = 0.a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ ve $y = 0.a_na_1a_2\ldots a_{n-1}a_na_1a_2\ldots a_{n-1}\ldots$ olsun.
Şimdi $0.a_1a_2a_3\ldots a_n = \frac{s}{10^n}$ olduğundan, x sayısının kesirli ifadesi $x = \frac{s}{10^n-1}$ olur. Ayrıca aynı şekilde $0.a_na_1a_2\ldots a_{n-1} = \frac{t}{10^n} = \frac{ks}{10^n}$ olduğundan, y sayısının kesirli ifadesi de $y = \frac{ks}{10^n-1}$ olur. Buradan da $y = kx$ denklemini elde ederiz.
Bunların dışında $y = \frac{a_n}{10} + \frac{x}{10}$ ya da başka bir deyişle, $10y = a_n + x$ olduğu açıktır ve buradan da $10kx = a_n + x$ yani, $x = \frac{a_n}{10k-1}$ denklemi bulunur.
Dolayısıyla problemi, a_n ve k için (ikisi de 9'dan büyük değerler alamayacağı için), deneme yanılma ile çözülebilecek düzeye indirgemiş olduk. Burada dikkat edeceğimiz bir diğer husus ise $a_n \geq k$ olması gerektiğidir. Dolayısıyla burada her bir k değeri için en küçük x değerini ancak $a_n = k$ durumunda elde ederiz.
Bu durumda her bir $\frac{k}{10k-1}$ değerini, her $2 \leq k \leq 9$ için deneyerek, en küçük s değerinin $k = 4$ olduğunda, $\frac{4}{39} = 0.102564 \Rightarrow s = 102564$ olarak bulunduğunu görürüz.
Sonuç olarak, birler basamağı başa alındığında elde edilen sayıyı kalansız bölen en küçük sayı 102564 olarak bulunur.

98. $(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) = y^{2^x}$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm. $x \geq 1$ ise y^{2^x} bir tam kare olur. $x, x+1, x+2$ ve $x+3$ sayıları, $4k, 4k+1, 4k+2$ ve $4k+3$ şeklinde olacaktır. Bu durumda eşitliğin sol tarafındaki üç terim 4'e bölünebilirken dördüncü terim $4k+2$ şeklinde olacağı için eşitliğin sol tarafı (mod 4) te 2'ye denk olacaktır. Fakat (mod 4) te hiç bir tam kare 2'ye denk olamayacağı için eşitliğin sol tarafı bir tam kare olamaz. O halde eşitliğin sağ tarafı da bir tam kare olamaz. Bu durumda $x \geq 1$ ise çözüm yoktur.

$x \leq -4$ ise eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı ise negatif olduğu için bu durumda da çözüm yoktur. Geriye $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$ durumu kalır. Bu değerler de eşitikte yerine konulduğunda $x = -2$ için $y = 16$ ve $x = 0$ için $y = 6$ değerleri bulunur. Eşitliği sağlayan (x, y) çiftleri $(-2, 16)$ ve $(0, 6)$ olur.

99. 2^{2004} ün 2004 ile bölümünden kalanı bulunuz.

Çözüm. 2004 sayısını $2004 = 2^2 \times 501$ şeklinde yazabiliriz. 2 ile 501 aralarında asal olduğundan, Fermat Teoreminin Euler Genellemesi bize $2^{\phi(501)} \equiv 1 \,(\text{mod} 501)$ verecektir. Burada $\phi(n)$ sayısı n den küçük ve n ile aralarında asal olan sayıların sayısını göstermektedir. 501 asal çarpanlarına 3×167 şeklinde ayrıldığından, $\phi(501) = (3-1)(167-1) = 332$ dir. Yani, $2^{1992} \equiv (2^{332})^6 \equiv 1 \,(\text{mod} 501)$ dir. $2^{1992} \equiv 0 \,(\text{mod} 4)$ eşitliğini de kullanarak 2^{1992} (mod2004) ü hesaplayacağız.
Eğer $x \equiv 1$ (mod501) ise bir t tam sayısı için $x = 1 + 501t$ dir. Buradan da $1+501t \equiv 1+t \equiv 0 \,(\text{mod} 4)$, yani $t \equiv 3 \,(\text{mod} 4)$ bulunacaktır. Böylece bir s tam sayısı için $1+501t = 1+501(3+4s) = 1504+2004s$ bulunur. Yani, $2^{1992} \equiv 1504 \,(\text{mod} 2004)$ tür (Çin Kalan Teoremi bu çözümün (mod2004) te tek olduğunu verir). Buradan

$$2^{2004} = 2^{1992} \cdot 2^{12} = 1504 \cdot 2^{12} = (1504 \cdot 2^2) \cdot 2^{10} = 4 \cdot 1024 = 88(\text{mod} 2004)$$

bulunur.

100. $n|(p-1)$ ve $p|(n^6 - 1)$ olmak üzere n bir pozitif tam sayı, p ise bir asal sayı olsun. Bu durumda $p-n$ ya da $p+n$ tam sayılarından en az birinin bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n|p-1$ olduğu için $a \geq 1$ olmak üzere $p = 1 + na$ olur. Burada ayrıca $p|n^6 - 1$ olduğu için $p|n-1$, $p|n+1$, $p|n^2+n+1$ ya da $p|n^2-n+1$ durumları muhtemeldir.
$p|n-1$ olsun. Bu durumda $n \geq p+1 > n$ olur fakat bu olanaksızdır.
$p|n+1$ olsun. Bu durumda $n+1 \geq p = 1+na$ olur ki bu ancak $a = 1$ ve $p = n+1$ durumunda olabilir ($p - n = 1 = 1^2$).
$p|n^2+n+1$ yani $b \geq 1$ olmak üzere $n^2+n+1 = pb$ olsun. Burada $p = 1+na$ olduğundan $n|b-1$ olur ve dolayısıyla $c \geq 1$ olmak üzere $b = 1+nc$ olur. Burada

$$n^2+n+1 = pb = (1+na)(1+nc) = 1+(a+c)n+acn^2 \text{ ya da } n+1 = acn+a+c$$

olduğu görülür. Bu durumda $ac \geq 1$ ise $a+c \geq 2$ olur ancak bu olanaksızdır. $ac = 0$ ise $c = 0$ ve $a = n+1$ olur. Dolayısıyla $p = n^2+n+1$ eşitliği ve buradan da $p+n = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ eşitliği elde edilir.
$p|n^2-n+1$ yani bir öncekine benzer şekilde $n^2-n+1 = pb$ ve $b = 1+nc$ olsun. Bu durumda

$$n^2-n+1 = pb = (1+na)(1+nc) = 1+(a+c)n+acn^2 \text{ ya da } n-1 = acn+a+c$$

olur. Dolayısıyla $c = 0$, $a = n - 1$ ve $p = n^2 - n + 1$ olur ve buradan da $p - n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ eşitliği elde edilir.

101. $m^2 - 4n$ ve $n^2 - 4m$ sayılarının tam kare olmasını sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı çiftlerini bulunuz.

Çözüm. $m^2 - 4n \geq 0$ ve $n^2 - 4m \geq 0$ olmasından dolayı $4m \leq n^2 \leq \frac{m^4}{16}$ 'dır ve bu yüzden $m \geq 4$ olur. Benzer bir şekilde $n \geq 4$ olduğu elde edilebilir. $m = 4$ ise, $n = 4$'tür.
$m = n$ olsun. $m^2 - 4m = x^2$ denkleminden $(m-2)^2 - x^2 = 4$ denklemini elde ederiz ve bu denklem $(m-2-x)(m-2+x) = 4$ şeklinde yazılabilir. Denklemin sol tarafındaki $m - 2 + x$ ve $m - 2 - x$ sayılarının ikisi de tek ya da ikisi de çifttir. Bu yüzden, $m - 2 - x = m - 2 + x = 2$ ve dolayısıyla $m = 4$'tür.
Problemdeki simetriden dolayı, $m > n \geq 5$ olduğunu farzedebiliriz. O halde, $x^2 = m^2 - 4n > m^2 - 4m = (m-3)^2 + 2m - 9 > (m-3)^2 + 2.5 - 9 > (m-3)^2$ 'dir ve bu yüzden $m^2 > x^2 > (m-3)^2$ olur. $x^2 = (m-2)^2$ ise, $m^2 - 4n = (m-2)^2$ ve bu yüzden $n = m - 1$' dir. Bunu $y^2 = n^2 - 4m = (m-1)^2 - 4m = m^2 - 6m + 1 = (m-3)^2 - 8$ takip eder ve bu yüzden $(m-3-y)(m-3+y) = 8$'dir. Denklemin sol tarafındaki $(m-3-y)$ ve $(m-3+y)$ sayılarının ikisi de tek ya da ikisi de çifttir, bu yüzden bir tanesi 4'e, diğeri de 2'ye eşittir. Her iki durumda da $m = 6$ ve $n = 5$ elde ederiz.
Şimdi, $x^2 = (m-1)^2$ durumunu dikkate alalım; $m^2 - 4n = (m-1)^2$ olduğunu biliyoruz. Buradan $4n = 2m - 1$ olur. $4n$ çift, $2m - 1$ tek sayı olduğundan dolayı, bu durum mümkün olamaz. Sonuç olarak, problemin bütün çözümleri $(m, n) \in \{(4,4), (5,6), (6,5)\}$'tir.

102. a, b, c, d pozitif tam sayılar olmak üzere, her pozitif rasyonel sayının

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm. İlk önce, m ve n pozitif tam sayılar iken, $r = \frac{m}{n}$ rasyonel sayısı $(1, 2)$ aralığında ise r nin $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz. Bunun için $a = m+n$, $b = 2m - n$ ve $d = 2n - m$ seçip $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ad + d^2$ almak yeterlidir. Yani $b + d = a, a + b = 3m, a + d = 2a - b = 3n$ olacaktır.
Eğer $s > 0$ bir rasyonel sayıysa p ve q tam sayılarını uygun şekilde seçerek $1 < \frac{p^3}{q^3}s < 2$ elde edebiliriz. Bu durumda, $\frac{p^3}{q^3}s = \frac{a^3+b^3}{a^3+d^3}$ olmasını sağlayan a, b ve d tam sayıları vardır. Yani, $s = \frac{(aq)^3+(bq)^3}{(ap)^3+(bp)^3}$ olacaktır.

103. a ve b bütün n pozitif tam sayıları için $(a^n + n)|(b^n + n)$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar olsunlar. Bu durumda $a = b$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $a \neq b$ olduğunu varsayalım. n değerini 1 almak, $a+1$ sayısının $b+1$ sayısını böldüğünü gösterir, bu yüzden $b \geq a$ olmalıdır. $p > b$ bir asal sayı ve n de $n \equiv 1(\text{mod}(p-1))$ ve $n \equiv -a(\text{mod}p)$ denkliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı olsun. Böyle bir n'in bulunabileceği Çin kalan teoremi kullanılarak gösterilebilir. (Çin kalan teoremi kullanılmadan da $n = (a+1)(p-1)+1$ sayısının bu koşulları sağladığı görülebilir.)
$n = (p-1)k+1$ olsun. Fermat teoremi kullanılarak $a^n = a(a^{p-1} \cdots a^{p-1}) \equiv a(\text{mod}p)$ elde edilir. $n \equiv -a(\text{mod}p)$ olduğundan $a^n + n \equiv 0(\text{mod}p)$ bulunur. Bu yüzden p, a^n+n sayısını böler, dolayısıyla p sayısı b^n+n sayısını da böler. Halbuki yine Fermat teoremi ile benzer şekilde $b^n+n \equiv b-a(\text{mod}p)$ elde edilir. Böylece $p|b-a$ sonucuna ulaşırız. Fakat $p > b$ olduğu için bu bir çelişkidir.

104. Bir tam kare sayının son n basamağı 0 dan farklı ve birbirinin aynısıysa bu tam kare sayı n uzunluğundadır denir. Bir tam kare için mümkün olan en büyük uzunluğu bulunuz. Bu uzunluğa sahip tüm tam kare sayıları bulunuz.

Çözüm. İlk önce mümkün olan en büyük uzunluğu bulacağız.
Bir tam karenin son basamağı $0, 1, 4, 9, 6$ veya 5 ile bitmelidir. Son iki basamağı $11, 44, 99, 66, 55$ olan bir tam sayı 4 ile bölündüğünde sırasıyla $3, 0, 3, 2$ ve 3 kalanını vermelidir. Bir tam karenin 4 ile bölümünden kalan ya 0 ya da 1 olabileceğinden, bu sayının son iki basamağı 44 olmalıdır.
Uzunluğu 4 olan bir tam kare 10000 ile bölündüğünde 4444 kalanını vermelidir. Yani, 16 ile bölündüğünde 12 kalanını vermelidir. Fakat bu imkansızdır. Çünkü, bir tam kare 16 ile bölündüğünde $0, 1, 4$ veya 9 kalanlarından birini verir. Buradan da bir tam karenin uzunluğunun 3 ten büyük olamayacağı ve 3 durumunda ise son 3 basamağının 444 olacağı bulunur.
Uzunluğu 3 olan tüm tam kareleri bulmak için, $x^2 \equiv 444 \pmod{1000}$ denklemini çözeceğiz. Çin Kalan Teoremi sayesinde $\text{mod}(2^3)$ ve $\text{mod}(5^3)$ durumlarını incelemek yeterlidir.
$x^2 \equiv 4 \pmod 8$ bize $x \equiv 2 \pmod 4$ ü verir.
$x^2 \equiv 69 \pmod{125}$ durumunda ise $x^2 \equiv 4 \pmod 5$, yani $x^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, ve $x^2 \equiv 19 \pmod{25}$ bulunur. Bir t tam sayısı için $x = 5t \pm 2$ ise $(5t \pm 2)^2 = 25t^2 \pm 20t + 4 \equiv 19 \pmod{25}$ olacaktır. Buradan da $\pm 20t \equiv 15 \pmod{25}$ ve $4t \equiv \pm 3 \pmod 5$ bulunur. Yani, $t \equiv \pm 2 \pmod 5$ ve $x \equiv \pm 12 \pmod{25}$ tir.
Bir t tam sayısı için $x = 25t \pm 12$ durumunda ise $(25t \pm 12)^2 = 625t^2 \pm 600t + 144 \equiv 69 \pmod{125}$ tir. Buradan da $\pm 100t \equiv 50 \pmod{125}$ ve $2t \equiv \pm 1 \pmod 5$ bulunur. Yani, $t \equiv \pm 3 \pmod 5$ ve $x \equiv \pm 87 \pmod{125}$ tir.
4 ile 125 aralarında asal olduklarından Çin Kalan Teoremini kullanarak, 4 ve 125 modundaki her çözüm çifti için $4 \cdot 125$ modunda bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Yani, 500 modunda iki tane çözüm vardır.

Bir t tam sayısı için $x = 125t \pm 38$ ise, $125t \pm 38 \equiv 2 \pmod 4$ denkliği $t \equiv 0 \pmod 4$ ü gerektirir. Bir s tam sayısı için $t = 4s$ ise $x = 500s \pm 38$ dir. Buradan da $x^2 = 250000s^2 \pm 38000s + 1444 \equiv 444 \pmod{1000}$ bulunur.
Sonuçta, mümkün olan en büyük uzunluk 3 tür ve bu durumda tam karenin son 3 basamağı 444 ile bitmelidir. Bu da ancak ve ancak $x \equiv \pm 38 \pmod{500}$ durumunda mümkündür.

105. a, b, n ve m, $n > 1$ olacak şekilde, pozitif tam sayılardır. $a^n + b^n = 2^m$ ise $a = b$ olduğunun gösteriniz.

Çözüm. a ve b sayılarını, p ve q tek sayı, $r, s \geq 0$ olmak üzere $a = p2^r$ ve $b = q2^s$ olacak şekilde yazalım.

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= 2^m \\ (p2^r)^n + (q2^s)^n &= 2^m \\ p^n 2^{rn} + q^n 2^{sn} &= 2^m \end{aligned}$$

olur. Genelliği bozmadan $r \leq s$ diyebiliriz. Denklemimin son halini 2^{rn} ye bölersek

$$p^n + (2^{s-r}q)^n = 2^{m-nr}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her ikisi de pozitif olduğu için, eşitliğin sağ tarafı 1 den büyük olacaktır. Dolayısıyla, eşitliğin sağ tarafı çift sayıdır. O halde eşitliğin sol tarafının da çift olması gerekir. p tek sayı olduğu için, p^n de tek sayıdır. Eşitliğin sol tarafının tek sayı olabilmesi için $(2^{s-r}q)^n$ nin de tek sayı olması gerekir. Bu da 2^{s-r} nin tek olması demektir. O halde $2^{s-r} = 1$ olmalıdır ve $s = r$ dir.
a ve b'nin eşit olduğunu göstermek için, $s = r$ olduğundan, $p = q$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eşitliğin her iki tarafını da 2^s ye bölersek, pozitif bir t tam sayısı için, $p^n + q^n = 2^t$ elde ederiz. $p = q = 1$ olduğunu n'nin tek ve çift olduğu durumları inceleyerek gösterelim.
n tek olsun. $(p, q) \neq (1, 1)$ olduğunu kabul edelim. n tek olduğu için $p + q$, $p^n + q^n$ nin bir çarpanıdır. $C = p^n + q^n = 2^t$ ve pozitif bir u tam sayısı için, $A = p + q = 2^u$ dersek, $B = p^{n-1} - p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 - \cdots + q^{n-1} = 2^{t-u}$ olur. q ve p, pozitif tam sayılar olduğu için, $C > A$ dır. O halde $B > 1$ dir. Dolayısıyla B çift sayıdır. Fakat B, tek sayıdaki tek sayının toplamı olduğu için tek sayı olmak zorundadır. Bu da baştaki kabulümüzün yanlış olduğunu gösterir. Dolayısıyla $p = q = 1$ olur.
n çift olsun. n yerine pozitif bir w tam sayısı için, $2w$ yazalım. $(p^w)^2 + (q^w)^2 = 2^t$ ve p ve q tek sayı olduğu için, p^w ve q^w da tek sayıdır. (mod 4) te, tek sayıların kareleri 1 e denk olduğundan $1 + 1 = 2^t \pmod 4$ elde edilir. Bu eşitliği de sadece $t = 1$

sağlar. Bu durumda $p^w + q^w = 2^t = 2$ olur. p ve q pozitif tam sayılar olduğundan $p^w = q^w = 1$ olmak zorundadır. Bu da $p = q = 1$ olmasını gerektirir.
Sonuç olarak, $a = p2^r$ ve $b = q2^s$ iken, $s = r$ ve $p = q = 1$ olduğu için $a = b$ dir.

106. Herhangi iki n ve k pozitif tam sayıları için.

$$n = \pm\binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}$$

olacak şekilde $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$ pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Sabit bir k için, $n+\binom{m}{3}$ ifadesini tek tam sayı yapacak bir $m > k$ seçelim. n tek sayı ise $m \equiv 0 \pmod 4$ ve n çift sayı ise $m \equiv 3 \pmod 4$ olarak alalım. $n+\binom{m}{3}$ sayısı tek olduğu için $n + \binom{m}{3} = 2a+1$ olacak şekilde a sayısı vardır. Bu durumda

$$2a + 1 = \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3}$$

olduğundan

$$n = -\binom{m}{3} + \binom{a}{3} - \binom{a+1}{3} - \binom{a+2}{3} + \binom{a+3}{3}$$

elde edilir.
$m \geq 6$ için $a = \dfrac{n-1+\binom{m}{3}}{2} > m$ bulunur.

107. $p^m q^n = (p+q)^2 + 1$ eşitliğini sağlayan tüm m, n, p, q pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $p^m q^n = (p+q)^2+1 = p^2+2pq+q^2+1$ olduğu için $p \mid (q^2+1)$ ve $q \mid (p^2+1)$ olduğu açıkça görülmektedir. Eğer $p = q$ olduğunu düşünürsek, $p \mid p^2 + 1$ olur ve dolayısıyla $p = q = 1$ olur ancak bu verilen denklemin bir çözümü değildir.
Bu nedenle genelliği bozmadan $p < q$ olduğunu varsayabiliriz. Ancak $p = 1$ durumu $q = 2$ durumunu gerektirir ve $p = 1$, $q = 2$ çözüm değildir, bu nedenle $p \geq 2$ olur.

$$p^m q^n = (p+q)^2 + 1 < 4q^2 \leq p^2q^2 < pq^3 \leq p^m q^3$$

Yukarıdaki işlemlerden $n < 3$ sonucunu elde ediyoruz. $n = 2$ durumu $p^m < 4$, dolayısıyla $m = 1$, $p = 2$ veya $p = 3$ olmasını gerektirir. $p = 3$ için $3q^2 = (3+q)^2+1$ olur ki bu imkansızdır. $p = 2$ durumunda ise $2q^2 = (2+q)^2 + 1$ olur ve bu $q = 5$ durumunda bir çözümdür.
$n = 1$ durumu $p^m < 4q$ eşitsizliğini oluşturur. $q \mid p^2 + 1$ olduğunu biliyoruz, eğer

$q = p^2+1$ ise $p \mid q^2+1 = p^4+2p^2+2$ olur ve bu $p=2$ olmasını gerektirir, bu nedenle $q=5$ olur. Ancak $2^m 5^1 = (2+5)^2+1 = 50$ imkansızdır, dolayısıyla $q \leq \frac{p^2+1}{2}$ olur, bundan dolayı $p^m < 2(p^2+1)$ olur. Bu nedenle $p=2$ ve $m \leq 3$, veya $m \leq 2$ olur. Ancak $p=2$ durumu $q \leq \frac{5}{2}$ olmasını ve dolayısıyla $q \leq 2$ oluşunu gerektirir ki bu imkansızdır. O zaman $m \leq 2$ olması gerekir.
$m=1$ için eşitlik $pq = (p+q)^2+1$ haline dönüşür ancak bu durum imkansızdır.
$m=2$ için, $p^2 < 4q$ olur. Bu $q \mid p^2+1$ özelliğiyle birlikte $p^2+1 = q, 2q, 3q, 4q$ olasılıklarını ortaya çıkarır. Zaten yukarıda $p^2+1=q$ durumunu incelemiştik. p^2+1 (mod 3) veya (mod 4) te 0'a denk olamayacağı için geriye sadece $p^2+1=2q$ durumu kalır. Bu durumda $p \mid q^2+1$ özelliğinden $4p \mid p^4+2p^2+5$ elde edilir ve dolayısıyla $p \mid 5$ yani $p=5$, $q=13$ sonucuna oluşur ve bu verilen eşitliğin bir çözümüdür.
Sonuç olarak verilen eşitliğin çözümleri;

$$(m,n,p,q) \in \{(2,1,5,2), (2,1,5,13), (1,2,2,5), (1,2,13,5)\}$$

olur.

108. a ve b 2'den büyük tam sayılar olsun. $n_1 = a$, $n_k = b$ ve $i = 1,2,\ldots,k-1$ için $(n_i + n_{i+1}) | n_i n_{i+1}$ özelliklerini sağlayan bir k tam sayısı ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tam sayı dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İstenen özelliği sağlayan bir dizinin bulunduğu duruma $a \Leftrightarrow b$ diyelim. Burada $\Leftrightarrow$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Dolayısıyla her $a \geq 3$ için (a bir tam sayı olmak üzere) $a \Leftrightarrow 3$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.
Şimdi eğer a tam sayısı $t > 1$ ve bir tek sayı olmak üzere $a = 2^s t$ şeklindeyse, diziyi

$$2^s t, 2^s\left(t^2-t\right), 2^s\left(t^2+t\right), 2^s(t+1) = 2^{s+1}\frac{t+1}{2}$$

olarak alabiliriz. Burada $\frac{t+1}{2} < t$ olduğundan, sonlu sayıda basamak sonunda 2'nin bir kuvvetine ulaşılır. Diğer yandan eğer $s > 1$ ise diziyi

$$2^s, 3.2^s, 3.2^{s-1}, 3.2^{s-2}, \ldots, 3$$

olarak da alabiliriz.

109. Aşağıdaki özellikleri sağlayan N pozitif tam sayılarını bulunuz.

(a) N sayısı tam olarak 16 bölene sahip olacak $(1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = N)$.

(b) d_5. bölen, yani d_{d_5}, $(d_2+d_4)d_6$'ya eşit olacak.

Çözüm. n sayısı en fazla 4 tane farklı asal bölene sahip olabilir çünkü aksi durumda, bu asal sayıların birbirleriyle çarpımı da N sayısını böleceğinden 1. koşul sağlanamaz.

Ayrıca $d_2 = 2$ olmalı yoksa bütün bölenler tek sayı olur ama bu durum 2. koşul ile çelişmektedir.
Hipotez gereği $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$ olmalı, dolayısıyla $d_4 \geq 5$ olmalıdır. $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$ olduğu için ya $d_5 = d_4 + 1$ ya da $d_5 = d_4 + 2$ olmalıdır.
İlk durumda yani $d_5 = d_4 + 1$ ise, $d_6 = 2 + d_4$ olur. Dolayısıyle N üç tane ardışık bölene sahiptir, yani $3|N$ ve $d_3 = 3$ olur. $d_2 = 2$ olduğu için $6|N$ ve $d_4 = 6$ elde edilir. Buradan $d_5 = 7$, $d_6 = 8$ bulunur ama bu $4|N$ anlamına gelir. Bu durumda $d_4 = 4$ olmalıdır ama bu $d_4 = 6$ ile çelişir.
İkinci durumda, yani $d_5 = 2 + 4$ olduğu zaman şu iki durumu inceleyeceğiz: N sayısının 4 ile bölünebildiğini varsayalım. $d_4 \geq 5$ olduğu için $d_3 = 4$ olmalıdır, dolayısıyla N sayısı 8'in bir katıdır. $d_6 \geq 8$ olduğu için $8 \in d_4, d_5, d_6$ olmalıdır. Her üç durum için aşağıdaki gibi birer çelişki elde edilir:
Eğer $d_4 = 8$ ise $d_5 = 10$ olmalıdır. Bu durumda $5|N$ yani $d_4 = 5$ çelişkisi elde edilir.
Eğer $d_5 = 8$ ise $d_4 = 6$ olmalıdır. Dolayısıyla $3|N$ yani $d_3 = 3$ çelişkisi elde edilir.
Eğer $d_6 = 8$ ise $d_5 = 7$, $d_4 = 5$ olmalıdır. Dolayısıyla $10|N$ elde edilir. 2. koşul nedeniyle $d_7 = (2 + 5)8 = 56$ olur fakat $56 > 10$ olduğu için bir çelişki elde edilir. N sayısı 4'e bölünmediği için d_3 sayısı bir asal sayı olmalıdır.
N sayısının 3 ile bölünebildiğini varsayalım. Bu durumda $d_3 = 3$ olur. Dolayısıla $6|N$ olur ve $d_4 \geq 6$ olduğu için $d_4 = 6$ olmalıdır. Bu yüzden $d_5 = 8$ olur ve bu N sayısının 4 ile bölünebildiği anlamına gelir fakat bu bir çelişkidir.
N sayısı 3'e tam bölünmediği için $d_3 \geq 5$ ve $d_4 \geq 7$ olmalıdır. N ve $2 + d_4$ sayılar 4'e bölünmedikleri için, d_4 bir tek sayı olmalıdır. $2 + d_4$ ve d_4 sayılar 3'ün katı olmadıkları için d_4 sayısını bir k tam sayı olmak üzere $d_4 = 3k + 2$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca d_4 tek olduğu için, l bir tam sayı olmak üzere $d_4 = 6l + 5$ olmalıdır. $d_5 \leq 16$ olması gerektiği için $7 \leq d_4 \leq 14$ olmalıdır. Dolayısıyla $d_4 = 11$ ve $d_5 = 13$ olur.
$2d_3$ sayısı N sayısını böldüğü ve $d_4 = 11$'den büyük olduğu için $d_3 \geq 6$ elde edilir. Ayrıca d_3 sayısı asal olduğu ve $d_3 \leq 11$ olduğu için $d_3 = 7$ olmalıdır. Sonuç olarak $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$ bulunur.

110. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n'in basamaklarının tersten yazılışıyla elde edilen sayıyı $r(n)$ ile gösterelim. (Örneğin $r(2006) = 6002$). Herhangi a ve b pozitif tam sayıları için $4a^2 + r(b)$ ve $4b^2 + r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. Genelliği bozmadan $4a^2 + r(b)$ ve $4b^2 + r(a)$ sayılarının ikisinin birden tam kare olduklarını varsayalım ve $b \leq a$ olsun. $r(b)$ sayısının basamak sayısı en fazla b sayısının basamak sayısı kadar olabilir, dolayısıyla $r(b) < 10b \leq 10a$ olur. $a > 0$ olduğu için $4a^2 < 4a^2 + 10a$ ve $4a^2 + 10 < 4a^2 + 6a + 9$ elde edilir. Buradan $(2a)^2 < 4a^2 + 10a < (2a + 3)^2$ eşitsizlikleri elde edilir ve $4a^2 + r(b)$ tam kare olduğu için $4a^2 + r(b)$ ya $(2a + 1)^2$ ya da $(2a + 2)^2$ olmalıdır. Dolayısıyla $r(b) = 4a + 1$ ya da $r(b) = 8a + 4$ olur. $r(b) > a \geq b$ olduğu için a ve b sayıları aynı sayıda basamağa sahiptirler. a sayısı için yaptıklarımızı b için de tekrarlarsak, $(2b) < 4b^2 + 10b < (2b + 3)^2$ eşitsizliğini elde ederiz. $4b^2 + r(a)$ tam kare olduğu için $4b^2 + r(a)$ ya $(2b+1)^2$ ya da $(2b+2)^2$ olmalıdır. Şu üç durum gerçekleşebilir:

$r(a) = 4b + 1$ ve $r(b)4a + 1$. İlk eşitlikten a, ikincisinde b çıkartıp bu eşitlikleri toplarsak $(r(a) - a) + (r(b) - b) = 3(b - a) + 2$ eşitliğini elde ederiz ki bu eşitlik yanlıştır çünkü herhangi bir n pozitif tam sayısı için 9, $r(n) - n$ sayısını böler.

$r(a) = 8b + 4$ ve $r(b) = 4a + 1$ (aynı çözüm $r(b) = 8b + 4$ ve $r(a) = 4a + 1$ için de geçerlidir). Çıkartma ve toplama işlemleri sonucunda $(r(a) - a) + (r(b) - b) = 7b + 3a + 3$ eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı 3'e bölünebildiği için, b sayısı 3'e bölünebilmelidir. Öyleyse $r(b) = 4a + 1$ sayısı da 3'e bölünür. Dolayısıyla a ve $r(a)$ sayılarının 3'e bölümünde kalan 2'dir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $r(a) = (8b + 3) + 1$ olduğu için 3'e bölündüğünde kalan 1 olmalıdır.

$r(a) = 8b+4$ ve $r(b) = 8a+4$. Bu durumda $r(a)$ ve $r(b)$ sayılarının son basamakları çifttir, bu yüzden en az 2 olabilirler. Dolayısıyla a ve b sayılarının ilk basamakları 2'den büyük ya da 2'ye eşittir. Bu nedenle $8a + 4$ ve $8b + 4$ sayıları a ve b'den daha fazla basamağa sahiptirler. Buradan $r(a) < 8b+4$ ve $r(b) < 8a+4$ eşitsizlikleri elde edilir fakat bu eşitsizlikler birer çelişkidir.

111. $x^3+y^3+z^2 = t^4$ denklemini sağlayan ve ortak bölenleri 1 den büyük olmayan sonsuz tane pozitif tam sayı dörtlüsü (x, y, z, t) olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$[1^3 + 2^3 + ... + (n - 2)^3] + (n - 1)^3 + n^3 = (\frac{n(n + 1)}{2})^2$$

eşitliğini

$$(n - 1)^3 + n^3 + (\frac{(n - 1)(n - 2)}{2})^2 = (\frac{n(n + 1)}{2})^2$$

şeklinde yazabiliriz. Soruyu çözebilmek için $\frac{n(n+1)}{2}$ nin tam kare olduğu n pozitif doğal sayılarını bulmak yeterli olacaktır.

$(2n+1)^2-2(2x)^2 = 1$ denkleminin çözümleri, $u^2-2v^2 = 1$ Pell denkleminin çözümleri kullanılarak bulunabilir. Burada, $u_0 = 3$, $v_0 = 2$ ve u_k ile v_k da aşağıdaki eşitlikten elde edilebilir:

$$(u + \sqrt{2}v)^k(u - \sqrt{2}v)^k = (u_k + \sqrt{2}v_k)(u_k - \sqrt{2}v_k) = 1$$

Alternatif Çözüm. a bir pozitif doğal sayı olmak üzere, $(a+1)^4-(a-1)^4 = 8a^3+8a$ eşitliğini düşünelim. Eğer b bir çift sayıysa ve $a = b^3$ ise,

$$(b^3 + 1)^4 = (2b^3)^3 + (2b)^3 + [(b^3 - 1)^2]^2$$

elde edilir. b bir çift sayı olduğundan b^3+1 ve b^3-1 tek sayılardır. Bu da bize, $x=2b^3, y=2b, z=(b^3-1)^2$ ve $t=b^3+1$ sayılarının 1 den büyük ortak bölenleri olmadığını verir.

112. $n>1$ olmak üzere x, y ve n pozitif tam sayılar olsun. $x^n-y^n=2^{100}$ denkleminin kaç tane çözümü olduğunu bulunuz?

Çözüm. $n=2$, $n=4$, n'nin 4'ten büyük çift tam sayı olması ve n'nin tek tam sayı olması durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.
$n=2$ olduğunda $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=2^{100}$ dür. $(x-y)$ ve $(x+y)$, 2 'nin kuvvetleri olmak zorundadır. Ek olarak, $x-y$ ve $x+y$ 'nin her ikisi de çift ya da her ikisi de tek olmak zorundadır. Çarpımları 2^{100} olduğu için, her ikisi de çift olmalıdır. Bu yüzden, $(x-y)>1$ 'dir. Dolayısıyla, $y>0$ olduğundan, $0<a<b$ ve $a+b=100$ olacak şekilde a ve b tam sayıları için $x-y=2^a$ ve $x+y=2^b$ denklemlerini elde ederiz.
Yukarıdaki denklem kümesini çözerek, $x=2^{b-1}+2^{a-1}$ ve $y=2^{b-1}-2^{a-1}$ eşitliklerini elde ederiz.
Bu yüzden, aradığımız çözümler : $(a,b)=(1,99),(2,98),...,(49,51)$ 'dir.
Dolayısıyla, $x^2-y^2=2^{100}$ denkleminin 49 tane çözümü vardır.
$n=4$ durumunda Fermat'ın son teoreminden ($x^n+y^n=z^n$ denkleminin $n>2$ için sıfırdan farklı tam sayı çözümü yoktur.), $x^4-y^4=2^{100} \Rightarrow y^4+(2^{25})^4=x^4$ denkleminin çözümü yoktur. (Üs 4 için teoremin ispatını ilk olarak Fermat kendisi yapmıştır.)
Şimdi n 4'ten büyük çift bir tam sayı olsun. Negatif olmayan k tam sayıları için, daha genel bir denklem $x^n-y^n=2^k$ 'yı ele alarak, 4 'ten büyük n çift tam sayıları için çözümün olmadığını göstereceğiz.
Bir çözümün olduğunu varsayalım. $x^n-y^n=2^k$ olacak şekilde x, y ve $n>2$ pozitif tam sayılarını ve negatif olmayan k tam sayısını seçelim. Ayrıca, n minimum olsun.
$n=2m$ dersek, $(x^m-y^m)(x^m+y^m)=2^k$ olur.
Fakat, $m>2$ ve bazı $a\geq 0$ tam sayıları için $x^m-y^m=2^a$ olması, n 'nin minimum olma durumuyla çelişir.
Bu yüzden, $n>4$ çift tam sayıları için çözüm yoktur.
Son olarak n tek olsun. Pozitif k tam sayıları için, daha genel bir denklem $x^n-y^n=2^k$ 'yı ele alarak, n tek tam sayıları için çözümün olmadığını göstereceğiz.
Bir çözümün olduğunu varsayalım. $x^n-y^n=2^k$ olacak şekilde x, y, n ve k pozitif tam sayılarını seçelim. Ayrıca, k minimum olsun.
x ve y 'nin her ikisinin de çift ya da her ikisinin de tek olduğu açıkca görülür.

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})=2^k$$

olduğu için; x ve y tek ise, ikinci terim tek terimlerin bir tek sayısını içerir ve bu yüzden tektir. Ancak, bu durum mümkün değildir.
Dolayısıyla, x ve y çifttir. $x = 2u$ ve $y = 2v$ dersek, $u^n - v^n = 2^{k-n}$ olur.
$k - n > 0$ ise, bu durum k 'nın minimumluğu ile çelişir.
$k - n = 0$ ise, $u^n - v^n = 1$ denkleminin pozitif tam sayı çözümü yoktur.
Bu yüzden, n tek tam sayıları için çözüm yoktur.
Bütün sonuçları bir araya toplarsak; x, y ve $n > 1$ pozitif tam sayıları için $x^n - y^n = 2^{100}$ denklemi 49 tane çözüme sahiptir.

113. Her biri 0 dan farklı x, y, z ve t gerçel sayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} x + y + z &= t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{t} \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1000^3 \end{aligned}$$

$x + y + z + t$ toplamını bulunuz.

Çözüm. İlk iki denklemden $(x+y+z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 1$ elde edilir ve gerekli işlemler yapıldığında, $(x + y)(x + z)(y + z) = 0$ bulunacaktır. Yani x, y, z sayılarından en az ikisinin toplamı sıfırdır. Eğer $x + y = 0$ ise $z = t$ ve $x^3 + y^3 + z^3 = z^3 = 1000^3$ olmalıdır. Buradan da $z = t = 1000$ ve $x+y+z+t = z+t = 2000$ bulunur. $x+z = 0$ ve $y + z = 0$ durumları da aynı sonucu verir.

114. $y^2 = x^3 - 432$ denklemini sağlayan tüm x, y tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $x^3 = y^2 + 432$ ifadesi bir tam küptür ancak ve ancak $6^3(y^2 + 432) = 216(y^2 + 432)$ ifadesi bir tam küptür. Fakat $216(y^2 + 432) = (y + 36)^3 - (y - 36)^3$ tür. Dolayısıyla, $(6x)^3 + (y - 36)^3 = (y + 36)^3$ olur.
Fermat'ın son teoremine göre, $n > 2$ için, $a^n + b^n = c^n$ ifadesini gerçekleyen sıfırdan farklı a, b, c tam sayıları yoktur.
Bizim durumda $n = 3$ ve $x > 0$ dır. Dolayısıyla $(6x)^3 + (y - 36)^3 = (y + 36)^3$ ifadesi $y - 36 = 0$ veya $y + 36 = 0$ durumunda tam sayı çözümlerine sahip olabilir ki bu da bize $y = \pm 36$ ve $6x = 72$ verir.
Yani, verilen denklemin tüm tam sayı çözümleri $x = 12$ ve $y = \pm 36$ dır.

115. $x^{2006} - 4y^{2006} - 2006 = 4y^{2007} + 2007y$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Denklemin pozitif tam sayı çözümünün olduğunu kabul edelim ve bu değerlere x ve y diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} x^{2006} &= 4y^{2007}+4y^{2006}+2007y+2006 \\ x^{2006}+1 &= 4y^{2006}(y+1)+2007(y+1) \\ x^{2006}+1 &= (4y^{2006}+2007)(y+1) \end{aligned}$$

olur. Burada $4y^{2006}+2007 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan son ifadenin $4k+3$ şeklinde bir asal çarpanı olmalıdır. Ancak Fermat Teoremine göre bu olanaksızdır.

116. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere negatif olmayan x ve y tam sayıları için $ax+by$ şeklindeki negatif olmayan sayılara **"güzel"** diyelim. s tam sayısının t ile bölümünden kalan s_t olmak üzere $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonunu $f(n) = n - n_a - n_b$ olarak tanımlayalım. Bu durumda n tam sayısının güzel olabilmesi için gerekli ve yeterli şartın $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ dizisinin negatif olmayan sayılardan meydana gelmesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. n güzel ise $n = ax+by$ ve bu nedenle $n_a = (by)_a$ ve $n_b = (ax)_b$ olur. Dolayısıyla

$$f(n) = ax-(ax)_b+by-(by)_a = by'+ax'$$

tam sayısı da güzel olur ve bu nedenle dizi negatif olmayan sayılardan meydana gelir.

Şimdi dizi negatif olmayan sayılardan meydana geldiğinde n tam sayısının güzel olduğunu gösterelim. Dizi artmayan bir dizi olduğu için belli bir noktadan sonraki terimlerin hepsi birbirine eşit olacaktır. Ancak $f(k)=k$ durumu k tam sayısının ab tam sayısının bir katı olmasını gerektirdiğinden bu terimler güzel olur. Böylece geriye sadece aşağıdaki yardımcı teoremi göstermek kalıyor.

Yardımcı Teorem: $f(n)$ güzel ise n de güzel olur.

Yardımcı Teoremin İspatı: $n = 2n - n_a - n_b - f(n) = ax'+by'-ax-by = a(x-x')+b(y-y')$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $n \geq f(n) \Rightarrow n - n_a \geq f(n) - f(n)_a \Rightarrow ax' \geq ax+by-(by)_a \geq ax$ olduğundan $x' \geq x$ olduğu görülür. Benzer şekilde $y' \geq y$ durumu da gösterilebilir.

117. $n \geq 3$ koşulunu sağlayan her doğal sayı için $7x_n^2+y_n^2 = 2^n$ denklemini sağlayacak x_n, y_n tek, doğal sayı ikilisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n=3$ için $x_3=y_3=1$ ikilisi çözümdür. Şimdi verilen bir n doğal sayısı için x_n, y_n ikilisinin $7x_n^2+y_n^2=2^n$ denklemini sağladığını kabul edelim; öyle bir (X,Y) ikilisi bulalım ki $7X_n^2+Y_n^2=2^{n+1}$ sağlansın. Aslında,

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2(7x_n^2+y_n^2) = 2^{n+1}$$

olur. $(x_n + y_n)/2$ veya $|x_n - y_n|/2$ tek olmalıdır (toplamları x_n, y_n ikilisinin büyük olanına eşit olacaktır, yani toplamları tek sayı olacaktır). Bu da bize aradığımız ikiliyi sağlar.

118. 50! kaç değişik şekilde iki veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir?

Çözüm. n bir pozitif tam sayı olsun. İlk önce n sayısının kaç değişik şekilde bir veya daha fazla ardışık tam sayının toplamı şeklinde ifade edilebileceğini bulacağız. Bu gösterimlerin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısına eşit olduğunu göstereceğiz.

Bu ardışık tam sayıların sayısının bir tek sayı olması durumunda, n sayısı için $n = (a-b) + \ldots + a + \ldots (a+b)$ koşulunu sağlayan a ve $b \geq 0$ tam sayıları vardır. Yani, $n = a(2b+1)$ dir.

Ardışık tam sayıların sayısı bir çift sayıysa, n sayısı için $n = (a-b+1) + \ldots + a + (a+1) + \ldots + (a+b)$ koşulunu sağlayan a ve $b > 0$ tam sayıları vardır. Yani, $n = (2a+1)b$ dir. $b > 0$ olduğundan $2a+1 > 0$ olmalıdır.

Böylece, n nin tüm gösterimlerinin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısının iki karı olduğu bulunur.

n nin $c + \ldots + d$ şeklindeki gösteriminde d sayısı en büyük terim olsun. Eğer $c > 0$ ise $(1-c) + \ldots + (c-1) = 0$ eşitliğini kullanarak $n = (1-c) + \ldots + d$ yazabiliriz. Yani, n nin gösterimindeki ilk terim, $(1-c)$, negatif yapılabilir. Açık bir şekilde, bu metod toplamı ve en büyük terimi değiştirmeden toplama ardışık sayı eklemenin veya toplamdan ardışık sayı silmenin tek yoludur.

Benzer şekilde, $(1-c) \leq 0$ durumunda, $(1-c) + \ldots + (c-1) = 0$ eşitliğini kullanarak, ardışık terimleri toplamdan silebiliriz.

Yani, n nin pozitif tam sayıların toplamı şeklindeki her gösterimi için, her terimi pozitif olmayan sadece bir tane gösterim mevcuttur.

Yani, n nin gösterimlerinin yarısında sadece pozitif tam sayılar kullanılır.

Buradan da, n nin pozitif ardışık tam sayıların toplamı şeklindeki gösterimlerinin sayısının n nin pozitif tek tam sayı bölenlerinin sayısı olduğu bulunur.

$p_1, \ldots, p_r$ asal sayılar ve $a_1, \ldots, a_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere, $n = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$ olsun. n nin her böleni bu asal sayıların ve onların belirli kuvvetlerinin çarpımlarından oluştuğundan, n nin pozitif bölenlerinin sayısı $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_r+1)$ dir.

$50! = 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$ dir. Bu eşitlik, 50! i bölen her asal sayının $1 \ldots 50$ çarpımında kaç kere geçtiği sayılarak bulunabilir.

50! in tek tam sayı bölenlerinin sayısı $1 \cdot 23 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 2^6 = 93000960$ dır. 50! i sadece kendisini kullanarak bir ardışık sayının toplamı şeklinde yazabiliriz. Yani, 50! sayısı 93000959 değişik şekilde iki veya daha fazla sayıda ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılabilir.

119. $4^x+4^y+4^z$ ifadesini bir tam kare yapan biribirinden farklı bütün x, y, z tam sayılarını bulunuz.

Çözüm. $x < y < z$ ve $4^x + 4^y + 4^z = u^2$ olsun. $2^{2x}(1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}) = u^2$ eşitliğin tam sayılarda doğru olabilmesi için, parantez içindeki ifadenin bir tek sayının karesi olmalıdır. Yani, $1+4^{y-x}+4^{z-x} = (2a+1)^2$ olmalıdır. Buradan, $4^{y-x-1}+4^{z-x-1} = a(a+1)$ ya da

$$4^{y-x-1}(1 + 4^{z-y}) = a(a + 1)$$

yazılır. İki durum inceleyeceğiz:
a çift ise $a + 1$ tektir. Dolayısıyla $4^{y-x-1} = a$ ve $1 + 4^{z-y} = a + 1$ dir. Buradan, $4^{y-x-1} = 4^{z-y}$ ya da $y - x - 1 = z - y$ elde edilir. Dolayısıyla, $z = 2y - x - 1$ ve

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^x + 4^y + 4^{2y-x-1} = \left(2^x + 2^{2y-x-1}\right)^2$$

dir.
a tek ise $a + 1$ çifttir. Dolayısıyla $a = 4^{z-y} + 1$ ve $a + 1 = 4^{y-x-1}$ dir. Buradan, $4^{z-y} + 2 = 4^{y-x-1}$ ya da $2^{2z-2y-1} + 1 = 2^{2y-2x-3}$ elde edilir ki bu mümkün değildir, çünkü $2z - 2y - 1 \neq 0$ dır.