ANALİZ-CEBİR

I-TAM VE KESİR DEĞER

x gerçel sayısı için $n \leq x < n+1$ eşitsizliğini sağlayan n tam sayısına x'in *tam değeri* denir ve $[|x|]$ ile gösterilir. $x - [|x|]$ ifadesi ise x'in *kesir değeri* olarak adlandırılır ve $\{x\}$ ile gösterilir. $[|x|] \leq x < [|x|]+1$ olduğundan $0 \leq \{x\} < 1$ dir. Yani kesir değer her zaman negatif olmayan ve 1 den küçük bir gerçel sayıdır.

Örnek: $x + \dfrac{11}{2} = [|x|]^2$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $x + \dfrac{11}{2} = [|x|]^2$ bir tamsayı olduğu için, $n \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $x = \dfrac{2n+1}{2}$ şeklinde yazılabilir $\left(n \leq \dfrac{2n+1}{2} < n+1 \text{olduğundan } [|x|] = [|\dfrac{2n+1}{2}|] = n\right)$. Bu durumda $\dfrac{2n+1}{2} + \dfrac{11}{2} = [|x|] = n^2$ dir ve buradan da $n^2 - n - 6 = 0$ bulunur. Denklemin kökleri $n = 3$ ve $n = -2$ dir. $n = 3$ için $x = \dfrac{7}{2}$, $n = -2$ için $x = \dfrac{-3}{2}$ bulunur. Buna göre çözüm kümesi $\left\{\dfrac{-3}{2}, \dfrac{7}{2}\right\}$ dir.

Örnek: $\{x\}^2 = \dfrac{x}{2}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\{x\} = x - [|x|]$ olduğundan $(x - [|x|])^2 = \frac{x}{2}$ buradan $x^2 - 2x[|x|] + [|x|]^2 = \dfrac{x}{2}$ yazıp $[|x|] = n$ alırsak $2x^2 - (4n+1)x + 2n^2 = 0$ buluruz. Buradan $x_{1,2} = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{(4n+1)^2 - 16n^2}}{4} = \dfrac{4n+1 \pm \sqrt{8n+1}}{4}$ çıkar.

$x = \dfrac{4n+1+\sqrt{8n+1}}{4}$ ise $n \leq x < n+1$ olduğu için, $n \leq \dfrac{4n+1+\sqrt{8n+1}}{4} < n+1$ bulunur. Bu durumda $\sqrt{8n+1} < 3$ yani $8n+1 < 9$ dur. Yani $n < 1$ olmalıdır. Aynı zamanda $\sqrt{8n+1}$ ifadesinin gerçel olabilmesi için $n \geq \dfrac{-1}{8}$ yani $n \geq 0$ olmalıdır. $n = 0$ ise $x = \dfrac{1}{2}$ bir çözümdür.

$x = \dfrac{4n+1-\sqrt{8n+1}}{4}$ ise, yine $n \leq x < n+1$ eşitsizliğini kullanarak $8n+1 \leq 1$ sonucuna ulaşırız. Buradan da $n \leq 0$ bulunur. Yine $8n+1 \geq 0$, $n \geq \dfrac{-1}{8}$, $n \geq 0$ eşitsizliklerinden $n = 0$ olmalıdır. $n = 0$ için $x = 0$ bir diğer çözümdür.

Sonuç olarak çözüm kümesi $\left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$ dir.

II- EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde ilk olarak, bu kitapta ve matematik olimpiyatlarına yönelik diğer kitaplarda karşılaşılabilecek soruların birçoğunu çözmek için yeterli olan temel eşitsizlikleri,ikinci kısımda da bu eşitsizliklerin genellemeleri ve bazı daha az kullanılan diğer eşitsizlikleri vereceğiz.

1. TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Tüm a, b gerçel sayıları için $(a-b)^2 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı aşikardır. Bu temel eşitsizlik birçok problemin çözümünde kullanılabilir. Benzer şekilde $a > b$ eşitsizliğinin $a - b > 0$ eşitsizliğine denk olması da bir temel özellik olarak verilebilir.

Örnek: Birbirinden farklı a, b pozitif gerçel sayıları için

$$a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(a^3 + b^3) - (a^2 b + ab^2) = (a^2 - b^2)(a - b) = (a+b)(a-b)^2$ yazarsak $(a+b)(a-b)^2 > 0$ olduğundan verilen eşitsizlik ispatlanmış olur.

Örnek: Tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(x^2 + y^2 + z^2) - (yz + zx + xy) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx - 2xy) = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0.$

Ortalama Eşitsizlikleri

$(a-b)^2 \geq 0$ eşitsizliğinden $a^2 + b^2 \geq 2ab$ elde edilir. Buradan negatif olmayan x ve y gerçel sayıları için $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ bulunur. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki terime x ve y nin aritmetik ortalaması, sağ tarafındaki terime de geometrik ortalaması adı verilir. Bu eşitsizlik genelleştirilerek $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için **Aritmetik-Geometrik ortalama** eşitsizliği ($AO \geq GO$) elde edilir:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Eşitlik ancak ve ancak $x_1 = \cdots = x_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak istenilen eşitsizliğe bir adımda ulaşabiliriz:

$$\frac{1}{3}\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} = xyz.$$

Örnek: x, y gerçel sayıları için

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{3} \geq \frac{x^3y+y^3x}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(x-y)$ ile (x^3-y^3)'ün işaretleri aynı olduğu için çarpımları negatif olamaz. Buradan $x^4+y^4 \geq x^3y+xy^3$ elde edilir. Diğer taraftan $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak elde ettiğimiz $x^2+y^2 \geq 2xy$ eşitsizliğinden $(x^2+y^2)^2 \geq 2xy(x^2+y^2) = 2x^3y+2xy^3$ buluruz. İçler dışlar çarpımı yaparak ispatlamak istediğimiz eşitsizliği $(x^4+2x^2y^2+y^4)+(x^4+y^4) \geq 3(x^3y+xy^3)$ şeklinde yazarsak sol tarafın $(x^2+y^2)^2+(x^4+y^4)$ ifadesine eşit olduğu, onun da $(2x^3y+2xy^3)+(x^3y+xy^3) = 3x^3y+3xy^3$ den büyük veya eşit olduğu görülür.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO$ eşitsizliğini kullanarak $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}$ bulunur.

Yukarıdaki örnekte yer alan $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ ifadesinden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif gerçel sayıları için genelleştirerek $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ ifadesi elde edilir ve Harmonik ortalama olarak adlandırılır. Bu durumda **Geometrik-Harmonik ortalama** eşitsizliği $(GO \geq HO)$ kolaylıkla ispatlanabilir: $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

dir.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq GO \geq HO$ eşitsizliklerini kullanarak $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{3}{y+z+z+x+x+y}$ bulunur. Buradan $(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}$ elde edilir. Çarpmayı dağıtırsak $3+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{9}{2}$, buradan da $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ eşitsizliğini elde ederiz.

Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaya ek olarak karesel ortalamayı $\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda yukarıdaki gözlemleri de birleştirerek ortalama eşitsizlikleri teoremini verebiliriz.

Teorem: Ortalama Eşitsizlikleri
$x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$AO=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\ KO=\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}},\ GO=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\ HO=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

$$EB=\text{En Büyük}\{x_1,\cdots,x_n\},\quad EK=\text{En Küçük}\{x_1,\cdots,x_n\}$$

olarak tanımlanan aritmetik, karesel, geometrik, harmonik ortalamalar ve kümenin en büyük ve en küçük elemanı için

$$EB \geq KO \geq AO \geq GO \geq HO \geq EK$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Her biri için eşitlik ancak ve ancak $x_1=\cdots=x_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $AO \geq HO$ eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

yazıp, içler dışlar çarpımı yaparak istenilen eşitsizlik ispatlanır.

Örnek: $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 < (EB\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$$

eşitsizliğini ispat ediniz.

Çözüm: $(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + (x_2 + x_3 + \cdots + x_n) + \cdots + (x_{n-1} + x_n) + x_n$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(EB\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) &\geq x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \\
&\quad x_2(x_2 + \cdots + x_n) + \cdots + \\
&\quad x_{n-1}(x_{n-1} + x_n) + \\
&\quad x_n^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k<j} x_k x_j \\
&> \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k<j} x_k x_j\right] \\
&= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek: Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt{x^4 + y^2z^2} + \sqrt{y^4 + z^2x^2} + \sqrt{z^4 + x^2y^2} \geq \sqrt{2}(xy + yz + zx)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $KO \geq AO$ eşitsizliğinden

$\sqrt{\dfrac{x^4+y^2z^2}{2}} \geq \dfrac{x^2+yz}{2}$, $\sqrt{\dfrac{y^4+z^2x^2}{2}} \geq \dfrac{y^2+zx}{2}$, $\sqrt{\dfrac{z^4+x^2y^2}{2}} \geq \dfrac{z^2+xy}{2}$ ve $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ eşitsizliği $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ eşitsizliğine denk olduğundan $\sqrt{x^4+y^2z^2}+\sqrt{y^4+z^2x^2}+\sqrt{z^4+x^2y^2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \geq \sqrt{2}(xy+yz+zx)$ olur.

Örnek: $xy+yz+zx=1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &= \sqrt{xy+yz+zx+x^2} = \sqrt{(x+y)(x+z)} \\ &\leq \frac{2x+y+z}{2} \quad (GO \leq AO) \end{aligned}$$

olduğundan $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2} \leq 2(x+y+z)$ bulunur. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \dfrac{x+y+z}{3}$ $(KO \geq AO)$ bu ifade de $\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq 2(x+y+z)$ eşitsizliğine denk olduğu için

$$\sqrt{12(x^2+y^2+z^2)} \geq 2(x+y+z) \geq \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

dir.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

Teorem: $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ gerçel sayılar olmak üzere

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır.

Örnek: Tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Cauchy-Schwarz Eşitsizliğini kullanarak ispatı bir satırda verebiliriz: $(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$.

Örnek: x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geq x^2+y^2+z^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinden

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)$$

yazabiliriz. Buradan da $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geq x^2+y^2+z^2$ bulunur.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğini kullanarak, bazen oldukça işe yarayan, aşağıdaki eşitsizlik ispatlanabilir:
$a_1, a_2, \ldots a_n$ herhangi gerçel sayılar, $b_1, b_2, \ldots b_n$ ise pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır.

Örnek: Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için $xyz = 1$ olması durumunda

$$\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(z+x)}+\frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ alırsak, verilen denklem $abc = 1$ şeklini alır. Bu durumda *simetrik toplam* gösterimini kullanarak;

$$\sum_{\text{simetrik}} \frac{1}{x^3(y+z)} = \sum_{\text{simetrik}} \frac{1}{\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} = \sum_{\text{simetrik}} \frac{a^2}{b+c}$$

yazabiliriz. Şimdi Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinin bir sonucu olarak yukarıda yazdığımız eşitsizliği kullanarak

$$\sum_{\text{simetrik}} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $AO \geq GO$ kullanılmıştır.

2. DİĞER EŞİTSİZLİKLER

Karesel ortalamanın genellemesi olarak p. dereceden ($p \neq 0$) ortalamayı $M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlar ve bu tanımı $q \in \{\pm\infty, 0\}$ için $M_q = \lim_{p \to q} M_p$ olarak genişletirsek $M_\infty =$ En büyük$\{x_i\}$, $KO = M_2$, $AO = M_1$, $GO = M_0$, $HO = M_{-1}$, ve En küçük$\{x_i\} = M_{-\infty}$ olur. Bu gösterim kullanılarak, yukarıda verilen eşitsizlikler

$$M_p \leq M_q \Longleftrightarrow p \leq q$$

şeklinde genellenebilir.

Yukarıda tanımlanan ortalamalar bir adım daha genelleştirilerek, ağırlıklı ortalama kavramı verilebilir:

$w_1, w_2, \ldots w_n$ pozitif gerçel sayıları için $\frac{w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + \cdots + w_n}$ ile $x_1, \ldots, x_n$ in ağırlıklı aritmetik ortalaması, $(x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \cdots + w_n}}$ ile de ağırlıklı geometrik ortalaması tanımlanır ve bu durumda

$$\frac{w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + \cdots + w_n} \geq (x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \cdots + w_n}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Örnek: Toplamları 1 olan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Ağırlıklı aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak

$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} \geq (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$ buradan da $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^a b^b c^c$ bulunur. Benzer şekilde,

$\frac{ab + bc + ca}{a+b+c} \geq (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}$ eşitsizliğinden $ab + bc + ca \geq a^b b^c c^a$, ve

$\frac{ac + ba + cb}{a+b+c} \geq (a^c b^a c^b)^{\frac{1}{a+b+c}}$ eşitsizliğinden de $ab + bc + ca \geq a^c b^a c^b$ bulunur. Bu üç eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$(a+b+c)^2 \geq a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b$ bulunur. Verilen $a + b + c = 1$ eşitliği kullanarak ispat tamamlanır.

Teorem: Weierstrass Eşitsizliği
$x_1, x_2, \dots x_n$ pozitif gerçel sayıları için $n \geq 2$ durumunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) > 1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Teorem: Bernoulli Eşitsizlikleri

1. Her $n \geq 1$ tam sayısı ve her $x > -1$ gerçel sayısı için $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

2. Her $\alpha > 1$ veya $\alpha < 0$ ve her $x > -1$ için $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

3. Her $\alpha \in (0, 1)$ ve $x > -1$ için $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

eşitsizlikleri sağlanır.

Örnek: Her $x > 0$ gerçel sayısı için $(x + 1)^x \geq 2x^x$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İspatlanması istenen eşitsizlik $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq 2$ eşitsizliğine denktir. Bu da Bernoulli eşitsizliğinden çıkar: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq 1 + x \cdot \frac{1}{x} = 2.$

Teorem: Hölder Eşitsizliği
a_i, b_i negatif olmayan gerçel sayılar ve p, q sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ denklemini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır. Hölder Eşitsizliğinde özel olarak $p = \frac{1}{2} = q$ alındığında Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir.

Teorem: Minkowski Eşitsizliği

a_i, b_i ve $p \geq 1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p > 1$ için eşitlik ancak ve ancak $a_i = sb_i \ \forall i = 1, \ldots, n$ denklemini sağlayan bir s sabiti bulunması durumunda sağlanır. $p = 1$ özel durumunda eşitsizlik üçgen eşitsizliğinden kolayca ispatlanabilir.

Teorem: Chebyshev Eşitsizliği

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ve $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ gerçel sayıları için

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ veya $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ durumunda sağlanır.

Örnek: a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere;

$$\frac{a^2 - bc}{b + c} + \frac{b^2 - ca}{c + a} + \frac{c^2 - ab}{a + b} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İfade simetrik olduğu için genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ kabul edebiliriz. Bu durumda $(a - b)(a + b + c) \geq 0$ olduğu için $a^2 - bc \geq b^2 - ca$ dır. Benzer şekilde $a^2 - bc \geq b^2 - ca \geq c^2 - ab$ bulunur. Ayrıca $b + c \leq c + a \leq a + b$ olduğundan $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ eşitsizliği geçerlidir. Şimdi Chebyshev eşitsizliğini kullanarak
$$\frac{a^2 - bc}{b + c} + \frac{b^2 - ca}{c + a} + \frac{c^2 - ab}{a + b} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
eşitsizliğini elde ederiz. Bu da $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ olduğundan göstermemiz istenilen eşitsizliği verir.

Benzer şekilde aşağıdaki eşitsizlikler de Chebyshev eşitsizliğini kullanarak bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için ispatlanabilir:

- $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

- $\dfrac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\dfrac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\dfrac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\dfrac{3}{2}$

Tanım: I aralığında tanımlı ve gerçel değerli bir f fonksiyonu her $x, y \in I$ ve her $\alpha, \beta = 1-\alpha$ pozitif sayıları için $f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha f(x)+\beta f(y)$ eşitsizliğini sağlıyor ise, bu fonksiyona *dışbükey* fonksiyon adı verilir. Her zaman ters eşitsizlik sağlanması durumunda ise *içbükey* adı verilir. Bu durumda $-f$ dışbükey olur. Örnek olarak $f(x)=x^2$ fonksiyonu tüm $\mathbf{R}$'de dışbükey, $g(x)=\sin(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında içbükeydir.

Teorem:
I aralığında sürekli olan f fonksiyonunun dışbükey olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}\quad \forall x,y\in I$$

olarak verilir.

Teorem: Jensen Eşitsizliği
Tüm $f : I \to \mathbf{R}$ dışbükey fonksiyonlar için, α_i ler negatif olmayan ve $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ eşitliğini sağlayan gerçel sayılar ve $x_i \in I$ olmak üzere

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

eşitsizliği geçerlidir. İçbükey fonksiyonlar için eşitsizlik yön değiştirir.

Örnek: A, B, C bir üçgenin iç açıları olmak üzere;

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x)=\sin(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında içbükey olduğundan, Jensen eşitsizliği kullanarak;

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leq\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

elde ederiz.

III-POLİNOMLAR

Tanım: $a_n \neq 0$ olmak üzere $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ şeklinde ifade edilebilen fonksiyonlara n. dereceden polinom adı verilir. Polinomun katsayıları a_i'lerin hepsi bir A kümesinin elemanı ise $P(x) \in \mathbf{A[x]}$ yazılır.

Teorem: Her $P(x)$ ve $Q(x) \neq 0$ polinomu için $K(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden küçük olacak şekilde $P(x) = Q(x)B(x) + K(x)$ eşitliğini sağlayan ve $B(x)$ ve $K(x)$ polinomları tek bir şekilde bulunur.

Teorem: $P(x)$ polinomunun $(x - a)$ ile bölünebilmesinin gerek ve yeter şartı $P(a) = 0$ dır. Bu teorem aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Teorem: $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölünebilmesinin gerek ve yeter şartı $Q(x)$ in her bir kökünün aynı zamanda $P(x)$ in de kökü olmasıdır. (Not: a sayısı $Q(x)$ için n katlı bir kök ise $P(x)$ için en az n katlı olmalıdır.)

Teorem: Derecesi $n > 0$ olan $P(x)$ polinomunun, c bir sabit ve x_i ler karmaşık sayılar olmak üzere, terimlerin sıralaması gözetilmeksizin $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ şeklinde tek bir yazılımı vardır.

Bu teoreme göre derecesi $n > 0$ olan $P(x)$ polinomunun en fazla n tane kökü olabilir. Sonsuz sayıda kökü olan tek polinom sıfır polinomudur, ve onun derecesi eksi sonsuz olarak tanımlanır. Bir başka deyişle, dereceleri n'yi geçmeyen $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $n+1$ farklı noktada aynı değere sahip olmaları durumunda aynı polinom olmaları gerektiği sonucuna varılır. Buna ek olarak sonsuz sayıda kökü olan fonksiyonların, örnek olarak $\sin(x)$'in, bir polinoma eşit olamayacağı da bu teoremin bir sonucu olarak çıkar.

Örnek: Bütün $x \in \mathbf{R}$ sayıları için $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$ denklemini sağlayan tüm polinomları bulunuz.

Çözüm: $Q(x) = P(x) - P(0)$ olarak tanımlanan $Q(x)$ polinomu da verilen denklemi sağlar: $Q(x+1) = P(x+1) - P(0) = P(x) - P(0) + 2x + 1 = Q(x) + 2x + 1$. Buna ek olarak $Q(0) = 0$ dır. Bu durumda $Q(x)$ fonksiyonunun x^2 ye eşit olduğu yönünde hissiyatımız artar. $F(x) = Q(x) - x^2$ polinomunu ele alırsak,
$F(x+1) = Q(x+1) - (x+1)^2 = Q(x) + 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = Q(x) - x^2 = F(x)$

denkliğinden

$$\begin{aligned} F(x+1) &= F(x) \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

buradan $F(n) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$ bulunur. Bu durumda $F(x) = 0 \, \forall x \in \mathbf{R}$. Buna göre $Q(x) = x^2$, buradan da $P(x) = x^2 + P(0)$ bulunur. Sonuç olarak $P(x) = x^2 + a; \quad a \in \mathbf{R}$ dır.

Teorem: (Cebirin Temel Teoremi) Sabit olmayan her karmaşık $P(x) \in \mathbf{C[x]}$ polinomun bir karmaşık sayı kökü bulunur.

Teorem: (Bezout Teoremi) Katsayıları tam sayı olan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomu için $P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + \cdots a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y)$ olarak yazılabileceği için a, b farklı tam sayılar olmak üzere $(a - b)$ sayısı $P(a) - P(b)$ sayısını böler.

Örnek: Her $n \in \mathbf{Z}^+$ için $f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ olarak tanımlanan fonksiyonun tam sayı katsayılı bir polinom olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: $f(1) = 1, f(3) = 36$ ancak $(3 - 1) \nmid (36 - 1)$ olduğu için Bezout teoremine göre $f(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom olamaz.

Teorem: $(a, b) = 1$ olmak üzere $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısının $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomunun kökü olması durumunda $a|a_0$ ve $b|a_n$ dir.

Tanım: Sabit fonksiyonlar kullanılmadan $\mathbf{Z[x]}$ içinde iki polinomun çarpımı şeklinde yazılması mümkün olmayan $P(x) \in \mathbf{Z[x]}$ polinomlarına *asal(indirgenemez)* polinom adı verilir. Aksi durumda *indirgenebilir* polinom denir.

Örnek: $P(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ polinomu $\mathbf{Z[x]}$ de indirgenemez bir polinomdur. Benzer şekilde, x yerine $y+1$ yazarak, her $p > 2$ asal sayısı içine, $Q(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ polinomu da $\mathbf{Z[x]}$ de indirgenemez bir polinom olduğu görülür.

Teorem: (Gauss) $P(x) \in Z[x]$ polinomu $Q[x]$ de indirgenebilir ise $\mathbf{Z[x]}$ de de indirgenebilirdir.

Teorem: (Eisenstein Kriteri) Katsayıları tam sayı olan $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z[x]}$ polinomu için aşağıdaki şartları sağlayan bir p asal sayısı ve $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ sayısı bulunması durumunda $P(x)$ polinomunun derecesi k'dan büyük bir indirgenemez çarpanı bulunur:

$$p|a_0, p|a_1, \ldots, p|a_k; \quad p \nmid a_{k+1} \text{ ve } p^2 \nmid a_0$$

Özel bir durum olarak p asal sayısı $k = n-1$ olacak şekilde seçilebilirse, bu durumda $P(x)$ indirgenemezdir.

Örnek olarak $P(x) = x^5 + 4x^3 + 20x + 2$ polinomu indirgenemez yani çarpanlara ayrılamaz bir polinomdur.

Teorem: (Lagrange İnterpolasyon Polinomu) $n+1$ noktada değeri $P(x_i) = y_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ verilerek tek bir şekilde belirlenen n. dereceden $P(x)$ polinomu, $P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ olmak üzere

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i P_i(x)$$

olarak bulunur.

Örnek: $P(1) = 1,\ P(2) = 3,\ P(3) = 6$ koşullarını sağlayan ikinci dereceden $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm: Lagrange interpolasyon formülünü kullanarak

$$P(x) = P(1)\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + P(2)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + P(3)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 3(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3\right) + (-3x^2 + 12x - 9) + (3x^2 - 9x + 6)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

bulunur.

Tanım: $x_1, \cdots, x_n$ değişkenlerine bağlı $p(x_1, \cdots, x_n)$ polinomunun değeri, değişkenlerin tüm değişik dizilişlerine göre sabit kalıyorsa, bu polinoma *n değişkenli simetrik polinom* adı verilir.

Temel Simetrik Polinomlar $\sigma_k(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{\{i_1, \cdots, \imath_k\} \subset \{1, \cdots, n\}} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ olarak tanımlanır. (Toplam tüm k elemanlı $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ alt kümeler üzerinden hesaplanır.) Örnek olarak $n = 3$ için $\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ \ \sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ dür.

Teorem: $x_1, \cdots, x_n$ değişkenlerine bağlı her simetrik $p(x_1, \cdots, x_n)$ polinomu temel simetrik polinomlar olan $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir.

Örnek: $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1(x_1, x_2)^2 - 2\sigma_2(x_1, x_2)$.

Örnek: $P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^4 + \ldots + x_n^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

Teorem: Vieta Formülü $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ve $c_1, \cdots c_n$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

eşitliğindeki katsayılar $c_k = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$; $k = 1, \ldots, n$ olarak bulunur.

Örnek:

$$x + y + z = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 34$$

Denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: Kökleri x, y, z olan $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ polinomunu ele alalım. Köklerin toplamı $-a$ olduğu için polinom $t^3 - 4t^2 + bt + c$ polinomuna eşittir. $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ eşitliğinden $P(t) = t^3 + 4t^2 + t + c$ bulunur. Son olarak

$$x^3 - 4x^2 + x + c = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + y + c = 0$$

$$z^3 - 4z^2 + z + c = 0$$

denklemleri taraf tarafa toplanarak $c = 6$ bulunur. Buna göre $P(t) = t^3 - 4t^2 + t + 6 = (t + 1)(t - 2)(t - 3)$ olduğu, yani çözüm kümesinin $t \in \{-1, 2, 3\}$ olduğu görülür. Buna göre verilen sistemin, $x < y < z$ için, tek çözümü $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$ dür.

GERÇEL KÖKLÜ POLİNOMLAR

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomu için $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Re$, $(a_n \neq 0)$ ise bu polinoma n. dereceden gerçel katsayılı polinom dendiğini biliyoruz. Eğer bir $c \in \Re$ için $p(c) = 0$ ise c sayısına bu polinomun gerçel kökü denir.

Teorem: Derecesi tek sayı olan her gerçel katsayılı polinomun en az bir gerçel kökü vardır.

Örnek: Hangi $a \in \Re$ sayıları için $p(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1$ polinomunun tüm kökleri gerçeldir?

Çözüm: $p(1) = 0$ olduğundan 1 sayısı bu polinomun bir köküdür. $p(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (1-a)x - 1 = (x-1)(x^2 + ax + 1)$ olduğundan $x^2 + ax + 1$ polinomunun tüm kökleri gerçel olmalıdır. Bu ise $a^2 - 4 \geq 0$ durumunda mümkündür. Yani $a \geq 2$ veya $a \leq -2$ olmalıdır.

Örnek: $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$ denleminin gerçel köklerinin kareleri toplamını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle şunu belirtmekte fayda var. Bu sorunun çözümünde Vieta formülünü kullanmak yanlış olur. Çünkü bizden sadece gerçel olan köklerin toplamı istenmektedir. Verilen ifadeyi uygun şekilde çarpanlara ayırırsak amacımıza ulaşabiliriz.
$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$ olacak şekilde a, b, c, d gerçel sayıları bulmaya çalışalım. $x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (bc+ad)x + bd = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$ olacağından $a + c = 5,\ ac + b + d = 8,\ bc + ad = 7$, ve $bd = -3$ olmalıdır. Şimdi $b = 3$ ve $d = -1$ iken bu koşulları sağlayan a ile c bulunup bulunamayacağına bakalım. $a + c = 5$ ve $ac = 6$ olacağından $\{a, c\} = \{2, 3\}$ olmalıdır. $3c - a = 7$ olduğundan $c = 3,\ a = 2$ koşulları sağlar. Yani $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 3x - 1) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$ olur. $x^2 + 2x + 3$ polinomunun gerçel kökü olmadığı için $x^2 + 3x - 1$ polinomunun köklerinin kareleri toplamını bulmalıyız. $x^2 + 3x - 1$ polinomunun her iki kükü de gerçeldir ve köklerinin kareleri toplamı $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 2(-1) = 11$ dir.

IV-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ durumunda $f(x)$ fonksiyonuna a noktasında sürekli denir. $f(x)$ fonksiyonu $I = (a, b)$ kümesinin her noktasında sürekli olması durumunda $f(x)$ fonksiyonu I kümesi üzerinde süreklidir denir.

Örnek: Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $f(0) = 1$ ve tüm $x \in \mathbf{R}$ sayıları için $f(2x) - f(x) = x$ denklemini sağlayan sürekli fonksiyonları bulunuz.
Çözüm: Verilen denklemi $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}$ şeklinde yazıp;

$$\begin{aligned} f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{4}) &= \frac{x}{4}, \\ f(\frac{x}{4}) - f(\frac{x}{8}) &= \frac{x}{8}, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f(\frac{x}{2^{n-1}}) - f(\frac{x}{2^n}) &= \frac{x}{2^n} \end{aligned}$$

denklemlerini taraf tarafa toplarsak $f(x) - f(\frac{x}{2^n}) = x(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n})$ buluruz. n' nin büyük değerini alarak ve $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kullanarak tek çözümün $f(x) = x + 1$ olduğunu görürüz. ($f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise $\lim_{\frac{a}{b}\to x} f(\frac{a}{b}) = f(x)$ dir.)

Teorem: Ara Değer Teoremi $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, ve L sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ değerleri arasında bir sayı ise, bu durumda $[a, b]$ aralığında $f(c) = L$ olacak şekilde en az bir c gerçel sayısı vardır.

Örnek: $f(x) = x^{2010} - 3x + 1$ sürekli fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında en az bir gerçel kökü vardır.

Örnek: a, b, c, r ve s $(r \neq s)$ gerçel sayılardır. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü r, $-ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü ise s dir. Buna göre $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ denkleminin r ve s sayıları arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $a = 0$ ise $r = s$ olur. Bu yüzden $a \neq 0$ olmalıdır. $P(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ olsun. $ar^2 + br + c = 0$ olduğundan $-ar^2 = br + c$ 'dir. O halde $P(r) = \frac{a}{2}r^2 + br + c = \frac{a}{2}r^2 - ar^2 = -\frac{a}{2}r^2$ olur. Benzer şekilde $P(s) = \frac{a}{2}s^2$ bulunur.
$P(r) < 0$, $P(s) > 0$ ve $P(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğu için Ara Değer Teoremi'ni kullanarak $P(x)$ 'in r ve s arasında bir kökü olduğunu söyleyebiliriz.

V-DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM FONKSİYONLARI

$ad - bc \neq 0$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ şeklinde ifade edilen fonksiyonlara Doğrusal Dönüşüm fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonun katsayılarını alarak oluşturulan katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır. $f^{(2)}$ ile f fonksiyonunun kendisi ile bileşkesini $(f \circ f)$, $f^{(n)}$ ile de f nin kendisi ile n kere bileşkesini $(f \circ f \cdots \circ f)$ gösterelim. Bu durumda $f^{(n)}$ bileşke fonksiyonunun katsayı matrisi, A matrisinin kendisi ile n kere çarpımı olan A^n ye eşit olur.

Örnek: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ise katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Buradan $f \circ f(x) = f(f(x)) = \dfrac{x}{2x+1}$ bulunur. Benzer şekilde $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ olduğu için $f^{(n)}(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ bulunur.

Örnek: $f(x) = \dfrac{2x-7}{x+1}$ için $f^{(2010)}(x)$ bileşke fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Buradan $A^2 = \begin{bmatrix} -3 & -21 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, buradan da $A^3 = -27 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Buna göre $f^{(3)}(x) = (f \circ f \circ f)(x) = x$ dir. Bu durumda $2010 = 3 \cdot 670$ olduğu için $f^{(2010)}(x) = x$ bulunur.

VI-CAUCHY FONKSİYONEL DENKLEMİ

Her x, y gerçel sayısı için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ denklemini sağlayan f fonksiyonları için;

- f monotonsa,
  veya
- f sürekliyse

$f(x) = cx$ eşitliği geçerlidir. ($c \in R$, sabit)

İspat: Öncelikle her $q \in \mathbf{Q}$ rasyonel sayısı için $f(q) = f(1)q$ olduğunu gösterelim. $x = y = 0$ için $f(0) = 2f(0)$ buradan $f(0) = 0$ bulunur. $f(2) = 2f(1)$, $f(3) = f(2)+f(1) = 3f(1)$, $f(4) = f(3)+f(1) = 4f(1), \ldots$. Buradan da tümevarım kullanılarak, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ için $f(n) = nf(1)$ çıkar. Şimdi $y = -x$ alarak $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ olduğundan $\forall n \in \mathbf{Z}$ için $f(n) = nf(1)$ buluruz. Aynı zamanda $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x) + f(x) = f(3x), \ldots$ olduğundan $\forall n \in \mathbf{Z}$ için $f(nx) = nf(x)$ olur. $x = \dfrac{p}{q}$, $n = q$ alırsak $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, f(p) = qf(\dfrac{p}{q})$, $f(\dfrac{p}{q}) = f(1)\dfrac{p}{q}$ olur. Buna göre her $q \in \mathbf{Q}$ için $f(q) = f(1)q$ dur.
Şimdi, verilen durumlarda $f(x) = cx$ olduğunu gösterelim:

- f monotonsa genelliği bozmadan f'yi artan kabul edebiliriz. (Azalan ise $-f$ incelenir.) $f(x) = f(1)g(x)$ olsun. $\forall q \in \mathbf{Q}$ için $g(q) = q$ olur. $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$ olmak üzere $g(x_0) > x_0$ ise, her gerçel sayı bir rasyonel sayı dizisinin limiti olarak gösterilebildiğinden $g(x_0) > q_0 > x_0$ koşulunu sağlayan bir q_0 rasyonel sayısı bulunabilir. $q_0 > x_0$ ve g fonksiyonu da artan olduğu için $g(q_0) > g(x_0) > q_0$ bulunur. Bu ise $q(q_0) = q_0$ ile çelişir. Benzer şekilde $g(x_0) < x_0$ da çelişki vereceği için bütün $x \in \mathbf{R}$ gerçel sayıları için $g(x) = x$ ve $f(x) = f(1)f(x)$ olur.

- f sürekliyse $\lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(\dfrac{p}{q}) = f(x)$ ve $\lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(\dfrac{p}{q}) = \lim\limits_{\frac{p}{q} \to x} f(1)\dfrac{p}{q} = f(1)x$ olduğundan $f(x) = f(1)x$ olur.

Örnek: $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ ve her $x, y \in [0, \infty]$ için $f(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y)$ koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y = 0$ alarak $f(x^2) = xf(x)$, buradan $f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(y^2)$ bulunur. $[0, \infty]$ aralığındaki tüm a sayıları için $a = x^2$ olacak şekilde bir $x \in [0, \infty]$ bulunduğundan, her $a, b \in [0, \infty]$ için $f(a+b) = f(a)+f(b)$ sağlanır. Aynı zamanda her $a \in [0, \infty]$ için $f(a) \geq 0$ olduğundan, $\forall x, y \in [0, \infty]$, $x > y$ için $f(x) - f(y) = f(x - y) \geq 0$ dır. Buradan f nin artan bir fonksiyon olduğu ve yukarıdaki Cauchy fonksiyonel denkleminden, c, d sabit olmak

üzere, fonksiyonun $f(x) = cx + d$ şeklinde yazılabileceği sonucuna varılır. $f(0) = 0$ olduğu için $d = 0$ dır. $f(x) \geq 0$ olduğu için de $c \geq 0$ olmalıdır. Öte yandan, $c \geq 0$, $\ f(x) = cx$ için $f(x^2 + y^2) = c(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y)$ koşulu sağlanır.
Sonuç olarak verilen koşulu sağlayan tüm fonksiyonlar, $c \geq 0$ olmak üzere, $f(x) = cx$ şeklinde yazılabilir.

VII-DENKLEMLER

Örnek 1: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+d+\dfrac{2}{5}=0$ denklemini sağlayan a,b,c,d gerçel sayıları için $a+b+c+d$ toplamının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+d+\dfrac{2}{5}=A$ dersek;

$$A=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{1}{\sqrt{3}}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}d+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=0$$

olur. Buradan da $d=\dfrac{-4}{5}$, $c=\dfrac{-3d}{4}=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{-2c}{3}=\dfrac{-2}{5}$, $a=\dfrac{-b}{2}=\dfrac{1}{5}$ bulunur. Sonuç olarak $a+b+c+d$ nin alabileceği tek değer $\dfrac{-4}{5}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{-2}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{-2}{5}$ dir.

Örnek 2: $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5=0$ denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5=(x^4-4x^2+4)+(x-2\sqrt{x}+1)=(x^2-2)^2+(\sqrt{x}-1)^2$ olduğundan $x^4-4x^2+x-2\sqrt{x}+5\geq 0$ olur. Eşitlik ise $x^2-2=\sqrt{x}-1=0$ durumunda gerçekleşir. $x^2=2$ durumunda $\sqrt{x}\neq 1$ olduğundan denklemin gerçel kökü yoktur.

Örnek 3: $x^3-3x-7=0$ denkleminin tüm gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: $x=k+\dfrac{1}{k}$ olsun. (k gerçel olmayabilir.)
$x^3=k^3+\dfrac{1}{k^3}+3\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$, $3x=3\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$ olduğundan $x^3-3x-7=k^3+\dfrac{1}{k^3}-7$ olur. $k^3+\dfrac{1}{k^3}-7=0$ dolayısıyla $k^6-7k^3+1=0$ buradan $4k^6-28k^3+4=0$ buradan da $(2k^3-7)^2=45$ bulunur. $(2k^3-7)=3\sqrt{5}$, $k^3=\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$ olur. $a^3=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $b^3=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ olarak tanımlanan a,b gerçel sayıları için $ab=1$ sağlanır. Eğer $mn=1$ ise $m-n=\dfrac{m-n}{mn}$ ve $m+\dfrac{1}{m}=n+\dfrac{1}{n}$ dir. Bu yüzden: $k^3=a^3$ denkleminin kökleri k_1,k_2,a ve $k^3=b^3$ denkleminin kökleri k_1',k_2',b ise, $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ olur. $x=k+\dfrac{1}{k}$ olduğundan;
$x_1=a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}=\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{7+3\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ olur. Vieta teoreminden $x_1+x_2+x_3=0$ ve $x_1x_2x_3=7$ dir. $x_2+x_3=-x_1$, $x_2x_3=\dfrac{7}{x_1}$, $|x_2-x_3|=\sqrt{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3}$ olduğu için, $x_2>x_3$ kabul edersek $x_2-x_3=\sqrt{x_1^2-\dfrac{28}{x_1}}=\sqrt{\dfrac{x_1^3-28}{x_1}}$ olur. $x_1^3=3x_1+7$ olduğundan $x_2-x_3=\sqrt{\dfrac{3x_1-21}{x_1}}$ ve $x_2=\dfrac{-x_1+\sqrt{\frac{3x_1-21}{x_1}}}{2}$, $x_3=$

$x_2 = \dfrac{-x_1 - \sqrt{\frac{3x_1-21}{x_1}}}{2}$ olur. $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} < 8$ olduğundan $x_1 < 4$ tür. Sonuç olarak $3x_1 - 21 < 0$ ve $x_1 > 0$ olduğundan $\dfrac{3x_1-21}{x_1} < 0$ olur. Bu ise x_2 ve x_3 ün gerçel olmadığı anlamına gelir. Denklemin tek gerçel kökü $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ dir.

Örnek 4 $x^7 + x + p = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel kökünün olmasını sağlayan tüm p gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm $p(x) = x^7 + x + p$ polinomunun derecesi tek olduğu için en az bir kökü gerçeldir. $x > y$ ise $(x^7 + x + p) - (y^7 + y + p) = x^7 - y^7 + x - y > 0$ olduğundan, $p(x) > p(y)$ çıkar. Yani $p(x)$ polinomu artandır. Artan polinomların ancak bir gerçel kökü olabilir. ($a < b$, ve $p(a) = p(b) = 0$ durumunda, polinomun sonlu sayıda kökü olduğu için a ile b arasında $p(c) \neq 0$ olacak şekilde bir c gerçel sayısı bulunur. Artan olma özelliğinden dolayı $0 = p(a) < p(c) < p(b) = 0$ çelişkisi bulunur.) Sonuç olarak her p gerçel sayısı için $x^7 + x + p = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel kökü vardır.

VIII-DİZİLER

$k \in \mathbf{N}$ olmak üzere, tanım kümesi $\{k, k+1, \ldots\}$ olan fonksiyonlara *dizi* adı verilir ve $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Diziler tanımları itibarı ile hiçbir yerde sürekli olmayan fonksiyonlardır. Örnek olarak $\{a_n\}_{n=5}^{\infty} = n^2$ dizisi $n = 3$ için tanımsızdır. $n = 5$ de 25 değerini alır. a_n değerlerinin herbiri, değişken n'yi daha büyük aldıkça belli bir L değerine istenildiği kadar (eşit olmak dışında) yaklaşıyorsa, bu durumda $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ dizisinin limiti L dir denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olarak yazılır. Daha matematiksel olarak bu kavram şu şekilde verilebilir: Verilen her $\epsilon > 0$ için ona bağlı olan ve

$$\forall n \geq N \text{ için } |a_n - L| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ dir.
L nin sonlu bir sayı olması durumunda a_n dizisine *yakınsak dizi* diğer durumlarda (L nin sonsuz olması veya böyle bir L bulunmaması durumlarında) ise *ıraksak dizi* adı verilir.
Örnek olarak, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için N sayısını $N = \left\lceil \dfrac{1}{\epsilon} \right\rceil$ yani $\frac{1}{\epsilon}$ dan büyük veya eşit ilk tam sayı olarak tanımlayarak $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu (yakınsak) ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) görebiliriz. $b_n = n^2$ dizisi limiti sonlu bir sayı olmadığı için (artı sonsuz olduğu için: Verilen her M sayısı için ona bağlı olan ve $\forall n \geq N$ için $a_n > M$ koşulunu sağlayan bir $N = N(M)$ doğal sayısı bulunabilir.), $c_n = \sin(n)$ dizisi de limiti olmadığı için ıraksaktır.
Tüm elemanlarının mutlak değerleri belli bir M sayısından küçük olan dizilere ($|a_n| < M \quad \forall n \in \{k, k+1, \ldots\}$) *sınırlı dizi*, tüm $n > m$ için $a_n \geq a_m$ özelliğini gösteren dizilere *artan dizi*, tüm $n > m$ için $a_n \leq a_m$ özelliğini gösteren dizilere de *azalan dizi* adı verilir.
Örnek olarak $a_n = n^2$ dizisi artan sınırsız, $b_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ dizisi artan sınırlı, $c_n = (-1)^n$ dizisi ise ne artan ne de azalan ancak sınırlı olan dizilerdir. Artan ya da azalan dizilere *monoton dizi* adı verilir. a_n ve b_n dizileri monoton , c_n dizisi ise monoton değildir.

Teorem:(Weierstrass Teorem) Monoton ve sınırlı olan her gerçel sayılar dizisi yakınsaktır.
Örnek olarak

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1); \quad n \geq 1 \\ b_n &= \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}; \quad n \geq 1 \\ c_{n+1} &= \sqrt{6 + c_n}; \quad n \geq 1, \quad c_1 = 1 \end{aligned}$$

dizilerinin yakınsak oldukları Weierstrass teoremi kullanılarak gösterilebilir. Buna karşılık $d_{n+1} = d_n + \sqrt{d_n}; \quad n \geq 1, \quad d_1 = 2010$ dizisi ıraksaktır: d_n dizisinin artan bir dizi olması, limitin eğer varsa, en azından 2010 olmasını gerektirir. Oysa, verilen denklemin iki tarafının limitini alarak limitin ancak 0 olabileceğini görülür.

IX-SERİLER

Bir $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ dizisi için $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$; $s_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1}$ olarak tanımlanan diziye a_n dizisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir. $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ sonsuz toplamı $\lim_{n\to\infty} s_n$ olarak tanımlanır ve a_n *serisi* olarak adlandırılır. $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak veya ıraksak olması s_n dizisinin yakınsak veya ıraksak olması demektir.

Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için tanımlanan s_n dizisi yakınsak ise, yani $\lim_{n\to\infty} s_n = L < \infty$ ise aynı zamanda $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$ olacağı için $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = 0$ bulunur. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ serisi ıraksaktır. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dizileri için bu gözlemden yola çıkarak birşey söylenemez. Aslında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi ise yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin ırsaksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kısmi toplamlar dizisine bakarsak;

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \geq 1 + 0\frac{1}{2}, \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1\frac{1}{2}, \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + 2\frac{1}{2}, \\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \geq 1 + 3\frac{1}{2}, \\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Tümevarım kullanılarak, $s_{2^n} \geq 1 + n\frac{1}{2}$ eşitsizliği ispatlanabilir. Bu durumda s_n dizisinin limiti sonsuz olduğu için, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ olduğu için

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

buradan da $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, yani $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ bulunur.

Yukardaki örneklerin bir genellemesi olarak, p-*testi* olarak bilinen kural $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ dizisinin $0 < p \leq 1$ değerleri için ıraksak, $p > 1$ değerleri için yakınsak olduğunu söyler.

GEOMETRİK SERİLER

$|r| < 1$ olmak üzere $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ toplamına geometrik seri adı verilir ve $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ eşitliği geçerlidir.

Örnek: Bir kenarı 1 birim olan bir ABC eşkenar üçgeninin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden üçgeni çizelim. Daha sonra aynı işlemi bir önceki adımda elde ettiğimiz üçgene uygulayarak sonsuza kadar devam edelim. ABC üçgeni de dahil olmak üzere çizdiğimiz tüm eşkenar üçgenlerin alanları toplamını hesaplayınız.

Çözüm: Aradığımız toplamı S ile gösterelim. Bu durumda $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^i = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ birim karedir.

Örnek: a, b, c pozitif gerçel sayılardır. Bir karınca koordinat düzleminde orijinden başlayarak önce 1 birim sağa, sonra da 1 birim yukarıya gidiyor. Daha sonra a birim sağa ve b birim yukarıya giderek her seferinde bir önceki adımda sağa gittiğinin a katı kadar sağa ve yukarıya gittiğinin b katı kadar yukarıya gidiyor. Bu işlemi sonsuz kez yaparsa toplamda c birim yer değiştirmiş oluyor. Bu koşulları sağlayan tüm a, b, c leri belirleyiniz.

Çözüm: Sağ tarafa alınan toplam yolu Δx ile, yukarı tarafa alınan toplam yolu da Δy ile gösterelim. Bu durumda $\Delta x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a^i$, $\Delta y = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b^j$ dir. Bu sayıların birer gerçel sayı olması için $a < 1$ ve $b < 1$ olmalıdır ve bu durumda $\Delta x = \dfrac{1}{1-a}$, $\Delta y = \dfrac{1}{1-b}$ olur. $c^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2} + \dfrac{1}{(1-b)^2}$ eşitliğinden, a, b, c gerçel sayılarının

$a < 1,\ b < 1,$ ve $c = \sqrt{\dfrac{1}{(1-a)^2} + \dfrac{1}{(1-b)^2}}$ koşullarını sağlayan tüm pozitif gerçel sayılar olabileceği görülür.

ANALİZ-CEBİR - PROBLEMLER

1. Bir araba yokuş inerken 72 km/s, düz yolda 63 km/s ve yokuş çıkarken 56 km/s hızla hareket edebiliyor. Bu araba, A şehrinden B şehrine 4 saatte gidip, aynı yolu 4 saat 40 dakikada döndüğüne göre, A ve B şehirleri arasındaki mesafeyi bulunuz.

2. $x + y^2 = 1$, $x^2 + y^3 = 1$ denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

3. $M(n) = \{-1, -2, ..., -n\}$ olmak üzere, $M(n)$ nin bütün alt kümelerinin elemanları çarpımlarının toplamı kaçtır ?

4. Aşağıdaki denklemin bütün gerçel köklerini bulunuz:

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

   Not: Burada $\lfloor x \rfloor$, x ten küçük en büyük tam sayıyı temsil etmektedir.

5. Tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

$$a + b + c \leq 3d$$

$$b + c + d \leq 3a$$

$$c + d + a \leq 3b$$

$$d + a + b \leq 3c$$

7. Tam sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlı f fonksiyonu,tüm x tam sayıları için
   $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğini sağlıyor. Eğer $f(1) = 2$ ise, $f(2004)$ kaçtır?

8. Aşağıdaki denklemi gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$||x+2| - 2x| = \frac{x+3}{2}$$

9. $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere $ab + bc + cd + da$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

10. Koordinat düzleminde merkezden harekete başlayan bir sinek önce 1 birim yukarıya sonra $\frac{1}{2}$ birim sağa sonra $\frac{1}{4}$ birim aşağıya sonra $\frac{1}{8}$ birim sola sonra $\frac{1}{16}$ birim yukarıya,... doğru hareketlerine sonsuza dek devam ediyor. Bu hereketler sonunda sineğin bulunucağı noktayı belirleyiniz.

11. α, β, γ sayıları $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ yi hesaplayınız.

12. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x + xy + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} = 1$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

13. Bir tren, aralarındaki mesafe 20 km olan iki istasyon arasındaki yolculuğu daima aynı sürede tamamlamak zorundadır. Bir gün yolun tam ortasında durmak zorunda kalan tren 3 dakika bekledikten sonra, gecikmeyi telafi etmek için hızını 10 km/saat artırarak yoluna devam ediyor. Bir başka gün aynı noktada 5 dakika süre ile durmak zorunda kalan tren, yolculuğu zamanında tamamlamak için hızını ne kadar artırmalıdır?

14. $a + b + c > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığı biliniyor. Bu durumda $c > 0$ olduğunu gösteriniz.

15. a, b ve c sayıları

$$\begin{aligned} ab - a &= b + 119 \\ bc - b &= c + 59 \\ ca - c &= a + 71 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere $a + b + c$ toplamının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

16. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesi içinde çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_5^2 - 23 \\ 4x_2 &= x_1^2 + 7 \\ 6x_3 &= x_2^2 + 14 \\ 8x_4 &= x_3^2 + 23 \\ 10x_5 &= x_4^2 + 34 \end{aligned}$$

17. x, y, a gerçel sayılar olmak üzere

$$x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$$

olduğuna göre a nın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

18. Aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$1.2.3\ldots 2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

19. f fonksiyonu, pozitif bir n tam sayısı için,

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f(1) + f(2) + \cdots + f(40)$ toplamını hesaplayınız.

20. Birbirinden farklı x, y, z tam sayıları $xy + yz + xz = 26$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ olduğunu gösteriniz.

21. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}$ dekleminin bütün gerçel köklerini bulunuz.

22. $z + \dfrac{1}{z} = 1$ ise $z^{2007} + \dfrac{1}{z^{2007}}$ kaçtır ?

23. a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{ay + bx}{xy} = \frac{bz + cy}{yz} = \frac{cx + az}{zx} = \frac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ise x, y ve z a, b, c cinsinden bulunuz.

24. a bir pozitif gerçel sayı olsun. Bu durumda $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$, $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ sayılarından hangisi daha büyüktür?

25. $2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1)$ denklemini sağlayan tüm a, b gerçel sayılarını bulunuz.

26. Çarpmaya göre terslerinin toplamı -1 ve küplerinin toplamı 4 olan tüm gerçel sayıları bulunuz.

27. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı $f(1) = 1$ ve $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ eşitliğini her x ve y gerçel sayıları için sağlayan bütün f fonksiyonlarını ispatıyla birlikte belirleyiniz.

28. $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}$ eşitliğini ispatlayınız.

29. a, b, c ve d, $a+b+c+d=1$ eşitliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır.

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$$

olduğunu gösteriniz.

30. x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2-3x+1=0$ ise $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}$ nin değerini hesaplayınız.

31. M kümesi 20 tane farklı gerçel sayıdan oluşmaktadır. M kümesinden alınacak olan her $a, b \in M$ için $a<-x<b$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in M$ bulunduğu biliniyor. M kümesinde kaç tane pozitif sayı bulunabilir?

32. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir geometrik dizidir. $a_1+a_2+a_3+a_4=7$, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=5$ olduğuna göre $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ çarpımını hesaplayınız.

33. Her $n>2$ tam sayısı için $(n!)^2>n^n$ olduğunu gösteriniz.

34.

$$\frac{1}{998}\left(\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2-1}+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+2}+\ldots+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+1995^2-2}\right)=1995$$

denklemini sağlayan tüm gerçel x sayılarını bulunuz.

35. x,y ve z gerçel sayılarının,

$$x^2+yz \leq 2,$$
$$y^2+xz \leq 2,$$
$$z^2+xy \leq 2,$$

eşitsizliklerini sağladığı biliniyorsa $x+y+z$ nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

36. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirlerinden farklı pozitif tam sayılar ve m sayısı, $\{a_i+a_j,\ i \neq j\}$ kümesinin eleman sayısı olsun. m en az kaç olabilir ?

37. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $f(3x+2y)=f(x)f(y)$ koşulunu sağlayan bütün $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

38. Hangi a gerçel sayıları için

$$x+y=a^3-a$$

$$xy=a^2$$

denklem sisteminin gerçel x ve y çözümleri vardır?

39. Doğal sayılarda tanımlı, her $m, n \in \mathbb{N}$ değeri için

- $f(f(2002)) = 17$
- $f(mn) = f(m)f(n)$
- $f(n) \leq n$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu tanımlanabilir mi?

40. S kümesi, 1 'den büyük tam sayılar kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. A sayısı, S kümesindeki elemanların çarpmaya göre terslerinin toplamı olsun. A bir tam sayı ise S kümesinin en az 3 elemanı olduğunu gösteriniz.

41. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

denkleminin köklerini bulunuz.

42. a pozitif gerçel sayısı $a^3 = 6(a+1)$ denklemini sağlıyor ise $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olamayacağını gösteriniz.

43. x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

44. $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi, $m \geq n$ olmak üzere negatif olmayan tüm m ve n tam sayıları için $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ eşitliğini sağlamaktadır.
$a_1 = 3$ ise a_{2008} i bulunuz.

45.

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0$$

denkleminin dört gerçel kökü ve bunlardan iki tanesinin toplamı 1 olduğuna göre denklemin bütün köklerini bulunuz.

46. $p(x) = x^3 - 2007x + 2002$ polinomunun kökleri r, s ve t olsun. Bu durumda

$$\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1}$$

değerini bulunuz.

47.

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$$

denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

48. Tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için $1 + \dfrac{3}{ab + bc + ca} \geq \dfrac{6}{a + b + c}$ eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

49. $f(x) = x^2 + (m+3)x + m + 2$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması için m parametresinin alabileceği bütün gerçel değerleri bulunuz.

    (a) Her $x \in (-1, 3)$ için $f(x) < 0$,

    (b) f fonksiyonun köklerinin terslerinin toplamı $\frac{1}{3}$ ten daha küçük olmalı.

50. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

51. a, b, c sıfırdan büyük gerçel sayılardır.

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

olduğunu gösteriniz.

52. a, b, c ile $x^3 - x^2 + 2 = 0$ denkleminin köklerini gösterelim. Bu durumda $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ ve $a^4 + b^4 + c^4$'ün değerlerini hesaplayınız.

53.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm gerçel (veya karmaşık) çözümlerini bulunuz.

54. $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört kökü olmasını ve köklerinin aritmetik dizi oluşturmasını sağlayacak bütün a gerçel sayılarını bulunuz.

55. Her $0 < x < 1$ gerçel sayısının, 1 den küçük iki pozitif gerçel sayının farkı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

56. $xyz(x+y+z)=1$ koşulunu sağlayan x,y,z pozitif gerçel sayıları için

a-) $\sqrt{(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2})} = (x+y)(y+z)(z+x)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b-) Verilen denklemi sağlayan bir (x,y,z) üçlüsü bulunuz.

57. $a,b,c,x,y,z \in \Re$ ve x,y,z sıfırdan farklı olmak üzere

$$ax^3 = by^3 = cz^3$$

ve

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ise $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ olduğunu gösteriniz.

58. $(x^3+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^3-2x^2-1)^3$ denklemini sağlayan tüm x gerçel sayılarını bulunuz.

59. $\lfloor x \rfloor$, ile x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$x+\lfloor\frac{x}{6}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor + \lfloor\frac{2x}{3}\rfloor$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz.

60. $\mathbf{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere,
$f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ fonksiyonu her $m,n\in\mathbf{N}_0$ için

- $f(n+1)>f(n)$
- $f(n+f(m))=f(n)+m+1$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Buna göre $f(2001)$ 'in alabileceği tüm değerlerini bulunuz.

61. Eğer α,β,γ sayıları x^3-x-1 denkleminin kökleri ise,

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

ifadesinin değerini hesaplayınız.

62. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) f(1)=1,

(ii) $f(x)\geq 0$

(iii) eğer x, y, ve $x + y$ hepsi $[0, 1]$ aralığında ise $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$

şartlarını sağlamaktadır. Her $x \in [0, 1]$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu gösteriniz.

63. n bir pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_n$ birer tamsayı olmak üzere

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n^3 \leq (2n - 1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n^2$$

olduğu biliniyor.Buna göre

a-) $x_1, x_2, \cdots, x_n$'den hiçbirinin negatif olamayacağını gösteriniz.

b-) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1$'in bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

64. Eğer $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümeleri aynı ise (elemanlar farklı sırada yazılmış olabilir)

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

65. n bir doğal sayı, $f(n)$ de $[n^2, 2n^2]$ kapalı aralığındaki tam karelerin sayısı olsun. f nin azalmayan ve örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

66. n bir tam sayı olmak üzere,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

koşulunu sağlayan, doğal sayılardan gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu olsun. Eğer $f(1) = 1002$ ise $f(2004)$ ü bulunuz.

67. n pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarını bulunuz.

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ denklemini sağlayan x,y ve z pozitif gerçel sayıları için $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

69. $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2$ eşitsizliğinin tüm x, y ve z pozitif gerçel sayıları için doğru olmasını sağlayacak sağlayacak en büyük M pozitif gerçel sayısını bulunuz.

70. Toplamları 1 olan tüm a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

71. x bir gerçel sayı ve $\overline{x}$ 'de x 'in tamsayı kısmı olsun.

$$3x^3-\overline{x}=3$$

eşitliğini sağlayan x gerçel sayılarını bulunuz.

72. a,b,c gerçel sayılar, $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$ olmak üzere

$$f(x(x+1))-f(x(x-1))=x^7$$

dir. $p(n)$, n 'ye bağlı bir fonksiyon ve

$$1^7+2^7+\cdots+n^7=\frac{n^2(n+1)^2p(n)}{24}$$

ise $p(n)$=?

73. Bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0$$

olduğunu gösteriniz.

74. Aşağıda verilen eşitliklerin ortak gerçel çözümlerinin hepsini bulunuz:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2}=z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2}=x$$

75. a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ olsun. Bu durumda

$$S=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

değerini bulunuz.

76. Toplamları 6, karelerinin toplamı 8, küplerinin toplamı ise 5 olan üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı nedir?

77. Hangi n pozitif tam sayıları için

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$

eşitliği sağlanacak şeklide birbirinden farklı a_1,a_2,. . . ,a_n tam sayılarını bulunabileceğini belirleyiniz.

78. $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığındaki a, b ve c gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu ispatlayınız.

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b} \leq 3$$

79. Tüm a, b, c pozitif rasyonel sayıları için

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

80. Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için aşağıdaki koşullar veriliyor:

(a) f sürekli artan bir fonksiyondur.

(b) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$.

(c) $m \neq n$ ve $m^n = n^m$ ise $f(m) = n$ ya da $f(n) = m$ olur.

Bu durumda $f(30)$'un değerini hesaplayınız.

81. Her $x, y \in \{1, 2, ..., 10\}$ için, $xf(x) + yf(y)$'nin bir böleni $x + y$ olacak şekilde, $\{1, 2, ..., 10\}$ kümesinden $\{1, 2, ..., 100\}$ kümesine tanımlı bütün artan f fonksiyonlarını bulunuz.

82. $(1 + \sqrt{2})^{3000}$ sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonraki 1000'inci basamak kaçtır?

83. a, b, c pozitif gerçel sayıları $abc = 2$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

84. Her x gerçel sayısı için

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right]$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

85.
$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

denkleminin köklerinin gerçel sayı olmasını sağlayan a gerçel sayılarını bulunuz.

86. $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned}
x_1^2 - x_2x_3\cdots x_n &= 0\\
x_2^2 - x_1x_3\cdots x_n &= 0\\
x_3^2 - x_1x_2\cdots x_n &= 0\\
&\vdots\\
x_n^2 - x_1x_2x_3\cdots x_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

87. Her $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ için

(a) $f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=3^x$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı gerçel sayılarda tanımlı bütün fonksiyonları bulunuz.

(b) $f(x)=\frac{2^{\frac{1+x}{x}}-2^x}{3}$ fonksiyonu için $(x \neq 0)$

$$f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2}{2002}\right)+\cdots+f\left(\frac{2002}{2002}\right)+2f\left(\frac{2002}{2001}\right)+2f\left(\frac{2002}{2000}\right)+\cdots+2f\left(\frac{2002}{1}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

88. (x,y) ile x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenin,, $[x,y]$ x ile ise y sayılarının en küçük ortak katını gösterelim. Bu durumda

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{[x,y]}+\frac{1}{(x,y)}=\frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan bütün $\{x,y\}$ ikililerini bulunuz.

89. a,b,c gerçel sayılardır. M sayısı $y=|4x^3+ax^2+bx+c|$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki en büyük değeri olsun. $M \geq 1$ olduğunu gösteriniz ve eşitlik durumunun gerçekleştiği bütün durumları belirleyiniz.

90. Pozitif tam sayılar üzerinde tanımlı f fonksiyonu $f(1) = 1996$ ve

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n) \qquad (n > 1)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1996)$ değerini bulunuz.

91. x bir gerçel sayı, n bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı olsun. Bu durumda $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \ldots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ olduğunu gösteriniz.

92.

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliği sağlayan bütün pozitif a, b, c gerçel sayılarını bulunuz.

93. a, b ve c rasyonel sayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin her birinin sadece $a = b = c = 0$ durumunda sağlanabileceğini gösteriniz.

(i) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0$

(ii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$

(iii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$

94. x, y, z, m, n sayıları $m + n \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır. Bu durumda

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} + y\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} +$$
$$z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} \leq \frac{3(m+n)}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$$

olduğunu gösteriniz.

95. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanıyor. $n \geq 4$ için $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$ olduğunu ispatlayınız.($\lfloor x \rfloor$ sayısı x'i aşmayan en büyük tam sayıdır.)

96. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$x + y + z = 2,$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1,$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6.$$

97. x bir gerçel sayı olmak üzere, $\sin(\cos x)$ ve $\cos(\sin x)$ fonksiyonlarının hangisi daha büyüktür?

98. a gerçel sayısı $(0,1)$ aralığında ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(0)=0 \qquad\qquad f(1)=1$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=(1-a)f(x)+af(y)$$

ise $f\left(\frac{1}{7}\right)=?$

99. Her x, y gerçel sayı ikilisi için, $f(xf(x)+f(y))=[f(x)]^2+y$ denklemini sağlayan tüm $f:R\to R$ fonksiyonlarını bulunuz.

100. $a+b+c+d=1$ denklemini sağlayan a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

101. Bir gün okul sonrasında, Murat fazladan bir matematik dersine daha katılmak zorundaydı. Öğretmen tahtaya katsayıları tam sayı olan ikinci dereceden bir $x^2+p_1x+q_1=0$ denklemini yazacak ve Murat bu denklemin çözümlerini bulacaktır. Eğer çözümlerin ikisi birden tam sayı değilse Murat eve dönebilecektir. Eğer denklemin çözümleri tam sayıysa öğretmen p_2 ve q_2, bir önceki sorunun çözümlerinin herhangi bir sıralaması olacak şekilde yeni bir $x^2+p_2x+q_2=0$ denklemi yazacak ve her şey baştan başlayacaktır. Öğretmenin, Murat'ı sonsuza dek okulda tutabilmesini sağlayacak tüm olası p_1, q_1 sayılarının bulunuz.

102. Doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine olan ve

$$f(f(n))\leq\frac{n+f(n)}{2}$$

koşulunu sağlayan bütün birebir $f(n)$ fonksiyonlarını bulunuz.

103. $a,b,c\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı ve kökleri tam sayı olan

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

ikinci dereceden fonksiyonların sayısı, herhangi bir pozitif n tam sayısı için $P(n)$ ile gösterilsin.

Yukarıdaki özelliklere sahip f fonksiyonları ve bütün $n\geq 4$ değerleri için $n<P(n)<n^2$ olduğunu ispatlayınız.

104. $a+b+c=3$ denklemini sağlayan a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

105. 271 sayısını, çarpımları maksimum olacak şekilde, pozitif gerçel sayıların toplamı olarak yazınız.

106. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan bütün (x,y,z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz. Not: $[r]$: r gerçel sayısının tamsayı kısmı, $\{r\}$: r gerçel sayısının ondalık kısmı.

$$x+[y]+\{z\}=200,2$$

$$\{x\}+y+[z]=200,1$$

$$[x]+\{y\}+z=200,0$$

107. $\Re-\{0\}$ kümesinde tanımlı ve $f(x)+8f(\frac{1}{x})=-63x$ denklemini sağlayan fonksiyonları tanımlayınız.

108. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$ ise $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ ifadesini k cinsinden hesaplayınız.

109. a,b,x,y gerçel sayıları için $a^3+ax+y=b^3+bx+y=c^3+cx+y=0$ ve a,b,c birbirinden farklı ise $a+b+c=0$ olduğunu ispatlayınız.

110. x,y,z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$ ise $(x+y)$ nin alabileceği değerleri bulunuz.

111. Tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için $\dfrac{1}{b(a+b)}+\dfrac{1}{c(b+c)}+\dfrac{1}{a(c+a)}\geq\dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$ olduğunu gösteriniz.

112. $a\neq 0,b,c$ gerçel sayıları için $(a+b+c)(4a-2b+c)<0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki farklı gerçel kökünün olduğunu ispatlayınız.

113. x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olduğunu gösteriniz.

114.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 20 \\ ab+bc+cd+da+bd+ac &= 150 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

115. x, y, z gerçel sayıları için $0 < x, y, z < 1$ ve $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ ise $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az birinin $\frac{1}{4}$ den küçük veya eşit olduğunu ispatlayınız.

116. a_1, a_2, a_3 gerçel sayılarının herbirinin 1 den büyük olduğu ve her $i = 1, 2, 3$ için $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ olduğu bilindiğine göre $\dfrac{1}{a_1 + a_2} + \dfrac{1}{a_2 + a_3} + \dfrac{1}{a_3 + a_1} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

117. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin üç gerçel kökü vardır. $-2 \leq a+b+c \leq 0$ ise bu üç kökten en az birinin $[0, 2]$ aralığında yer alacağını ispatlayınız.

118. a, b, c gerçel sayıları için

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= abc \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) &= a^3b^3c^3\end{aligned}$$

ise $abc = 0$ olduğunu ispatlayınız.

119. Negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $a_1, a_2, \ldots$ dizisi tüm n pozitif tam sayıları için; $a_n + a_{2n} \geq 3n$ ve $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ koşullarının ikisini birden sağlıyor. Buna göre

a-) Her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq n$ olduğunu gösteriniz.

b-) Soruda verilen şartları sağlayan bir a_n dizisi bulunuz.

120. Katsayıları negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $p(x)$ polinomu için $p(1) \geq 1$ ise tüm pozitif gerçel sayılar için $p(x)p\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 1$ olduğunu ispatlayınız.

121. $0 < \alpha, \beta, \theta < \dfrac{\pi}{2}$ için $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta = 1$ ise $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \dfrac{3}{8}$ olduğunu ispatlayınız.

122. $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$ ve $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_k + \dfrac{a_{k+1}}{2}$ ise, $\dfrac{1}{a_1a_3} + \dfrac{1}{a_2a_4} + \dfrac{1}{a_3a_5} + \cdots + \dfrac{1}{a_{98}a_{100}} < 4$ olduğunu ispatlayınız.

123. $p(0) = 0,\ p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$ koşulunu sağlayan tüm gerçel katsayılı $p(x)$ polinomlarını bulunuz.

124. $f : N_0 \to N_0$ $(N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$ bir fonksiyon olmak üzere tüm $n \in N_0$ sayıları için $f(f(n)) = f(n) + 1$ ve $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ dir. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

125. Her $x, y \in \mathbf{R}$ için $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

126. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ise $a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

127. $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \cos 2x$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

128. $\dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

129. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

ANALİZ-CEBİR - ÇÖZÜMLER

1. Bir araba yokuş inerken 72 km/s, düz yolda 63 km/s ve yokuş çıkarken 56 km/s hızla hareket edebiliyor. Bu araba, A şehrinden B şehrine 4 saatte gidip, aynı yolu 4 saat 40 dakikada döndüğüne göre, A ve B şehirleri arasındaki mesafeyi bulunuz.

   Çözüm: A şehrinden B şehrine giderken yokuş aşağı, düz ve yokuş yukarı olan mesafeler sırasıyla x, y ve z km olsun. s km yol v km/s hızla s/v saatte gidilir. Gidiş yolunda geçen zaman 4 saat olduğu için;

$$\frac{x}{72} + \frac{y}{63} + \frac{z}{56} = 4$$

   denklemi elde edilir. Dönüş yolu için;

$$\frac{x}{56} + \frac{y}{63} + \frac{z}{72} = \frac{14}{3}$$

   olur. Her iki denklemi de 56, 63 ve 72 nin OKEK'i olan 504 ile çarparsak;

$$\begin{aligned} 7x + 8y + 9z &= 2016 \\ 9x + 8y + 7z &= 2352 \end{aligned}$$

   denklemlerini elde ederiz. Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak $16(x+y+z) = 4368$, buradan da $x + y + z = 273$ buluruz. Dolayısıyla, iki şehir arasındaki mesafe 273 km'dir.

2. $x + y^2 = 1$, $x^2 + y^3 = 1$ denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

   Çözüm: İlk denklemi $x = 1 - y^2$ olarak ele alıp ikinci denklemde yerine koyarsak; $(1 - y^2)^2 + y^3 = 1$, yani $1 - 2y^2 + y^4 + y^3 = 1$, buradan da $y^2(y^2 + y - 2) = y^2(y+2)(y-1) = 0$ buluruz. Dolayısıyla çözümler, $y = 0$, $y = -2$, $y = 1$ ve bunlara karşılık gelen x değerleri ise sırasıyla, $x = 1$, $x = -3$ ve $x = 0$ olarak bulunur.

3. $M(n) = \{-1, -2, ..., -n\}$ olmak üzere, $M(n)$ nin bütün alt kümelerinin elemanları çarpımlarının toplamı kaçtır ?

   Çözüm $x_1, x_2, .., x_n$ n tane sayı olsun.

$$(1 + x_1)(1 + x_2)..(1 + x_n) = 1 + x_1 + x_2 + .. + x_n + x_1x_2 + .. + x_{n-1}x_n + .. + x_1x_2..x_n$$

yazılabilir. S bütün alt dizilerin elemanlarının çarpımlarının toplamı olmak üzere yukarıdaki eşitlik

$$S = (1 + x_1)(1 + x_2)..(1 + x_n) - 1$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada her i için $x_i = -i$ yazarsak S sayısı aradığımız toplama eşit olur. Bu durumda

$$S = (1 + (-1))(1 + (-2))..(1 + (-n)) - 1 = 0 - 1 = -1$$

bulunur.

4. Aşağıdaki denklemin bütün gerçel köklerini bulunuz:

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Not: Burada $\lfloor x \rfloor$, x ten küçük veya x e eşit en büyük tam sayıyı temsil etmektedir.

Çözüm Verilen denklemin iki tarafına da $\frac{1}{4}$ ekleyelim. Bu durumda denklemin sol tarafı $\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)^2$ olarak yazılabileceğinden;

$$\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2$$

ve dolayısıyla

$$x = \pm\left(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right)$$

olur. Buradan, $\lfloor x \rfloor$ her zaman bir tam sayı olduğundan, $\lfloor x \rfloor = n$ dersek; $x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ bulunur. Bu durumda sorudaki denklemi sağlayan her x gerçel sayısı, m bir tam sayı olmak üzere, $x = m + \dfrac{1}{2}$ şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda her m tam sayısı için $\left\lfloor m + \dfrac{1}{2}\right\rfloor^2 + \left\lfloor m + \dfrac{1}{2}\right\rfloor = m^2 + m = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ olduğundan verilen denklemi sağlayan bütün gerçel sayıların kümesi $\{x = m + \dfrac{1}{2};\ m \in \mathbf{Z}\}$ olur.

5. Tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ac} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a, b, c pozitif olduğundan $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ac} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a + b + c \Longleftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ dir. x, y, z pozitif sayılar olmak üzere $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ ve $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0$ olduğundan; $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ olur. Bu eşitsizliği iki kere uygularsak;
$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = abc(a + b + c)$ olur ve ispat biter.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

$$a + b + c \leq 3d$$

$$b + c + d \leq 3a$$

$$c + d + a \leq 3b$$

$$d + a + b \leq 3c$$

Çözüm: Verilen eşitsizlik sistemi simetrik olduğundan $\min\{a, b, c, d\} = a$ kabul edebiliriz. $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$ olduğundan $3a \leq b + c + d$ olur. Verilen eşitsizliklere göre $b + c + d \leq 3a$ dır. Dolayısıyla, $3a \leq b + c + d \leq 3a$ dir. Yani, $3a = b + c + d$ dir. $(a - b) + (a - c) + (a - d) = 0$ olduğundan ve $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$ olduğu için $a = b = c = d$ bulunur.

7. Tam sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlı f fonksiyonu, tüm x tam sayıları için
$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğini sağlıyor. Eğer $f(1) = 2$ ise, $f(2004)$ kaçtır?

Çözüm: Herhangi n pozitif tamsayısı için f fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$f(n+1) = \frac{1 + f(n)}{1 - f(n)}$$
$$f(n+2) = \frac{1 + f(n+1)}{1 - f(n+1)} = \frac{1 + \frac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1 - \frac{1+f(n)}{1-f(n)}} = -\frac{1}{f(n)}$$
$$f(n+4) = -\frac{1}{f(n+2)} = f(n)$$

Bu nedenle, tüm n doğal sayıları için f fonksiyonu $f(n+4) = f(n)$ eşitliğini sağlar. Şimdi de f fonksiyonunun bu özelliğinden faydalanarak $f(2004)$'ü bulalım

$f(2004) = f(2000) = f(1996) = ... = f(8) = f(4)$.

$f(2004) = f(4)$ olduğu için, $f(4)$'ün değerini hesaplayalım:

$f(1) = 2$ olduğundan, $f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3, f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2}, f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3}$.

Bu nedenle, $f(2004) = \frac{1}{3}$'tür.

8. Aşağıdaki denklemi gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$||x+2| - 2x| = \frac{x+3}{2}$$

Çözüm $x+2$ nin işareti $x=-2$ de değiştiğinden dolayı soruyu iki durumda inceleyeceğiz.

(a) $x<-2$ ise $|x+2|=-x-2$ dir. Dolayısıyla $|-x-2-2x|=\frac{x+3}{2}$, $|3x+2|=\frac{x+3}{2}$ ve $x<-2$ durumunu inceledeğimiz için $3x+2<0$ dır. Yani, $-3x-2=\frac{x+3}{2}$, buradan da $x=-1$ bulunur. Ama $x=-1$ noktası $x<-2$ kümesinde olmadığından dolayı, inceleme aralığında denklemi sağlayan bir değer yoktur.

(b) $x\geq -2$ ise $|x+2|=x+2$ dir. Dolayısıyla $|x+2-2x|=\frac{x+3}{2}$, $|x-2|=\frac{x+3}{2}$ bulunur. Burada da $x-2$ nin işareti $x=2$ de değiştiği için $-2\leq x<2$ ve $x\geq 2$ durumlarını incelemek gerekir.

- $-2\leq x<2$ ise $|x-2|=-x+2$ dir. Dolayısıyla $-x+2=\frac{x+3}{2}$, $x=\frac{1}{3}$ bulunur. $x=\frac{1}{3}$ inceleme aralığında olduğu için $x=\frac{1}{3}$ bir çözümdür.
- $2\leq x$ ise $|x-2|=x-2$ dir. Dolayısıyla $x-2=\frac{x+3}{2}$ $x=7$ bulunur. $x=7$ inceleme aralığında olduğu için $x=7$ bir çözümdür.

Sonuç olarak çözüm kümesi $\{\frac{1}{3},7\}$ dir.

9. $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere $ab+bc+cd+da$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ eşitliği ve buradan da Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak
$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\leq\left(\dfrac{a+c+b+d}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1+2+3+4}{2}\right)^2=25$
bulunur. Eşitlik ancak $a+c=b+d$ durumunda mümkündür. Örnek olarak $a=1,\ c=4,\ b=2,\ d=3$ alabiliriz.

10. Koordinat düzleminde merkezden harekete başlayan bir sinek önce 1 birim yukarıya sonra $\dfrac{1}{2}$ birim sağa sonra $\dfrac{1}{4}$ birim aşağıya sonra $\dfrac{1}{8}$ birim sola sonra $\dfrac{1}{16}$ birim yukarıya,... doğru hareketlerine sonsuza dek devam ediyor. Bu hareketler sonunda sineğin bulunacağı noktayı belirleyiniz.

Çözüm: Öncelikle $-1<x<1$ koşulunu sağlayan her x gerçel sayısı için; $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ olduğunu gösterelim. $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=A$ dersek $A-1=x(1+x+x^2+\cdots)=xA$ olur. $A(1-x)=1$ ve $A=\dfrac{1}{1-x}$ olur. (Not: $x\geq 1$ veya $x\leq -1$ iken A toplamı herhangi bir gerçel sayıya eşit olmaz.) Bu eşitliği soruda uygularsak; Sineğin
x koordinatı: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}-\cdots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{-1}{4}}=\dfrac{2}{5}$,
y koordinatı: $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}-\cdots=\dfrac{1}{1-\frac{-1}{4}}=\dfrac{4}{5}$ dir.

11. α, β, γ sayıları $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleri ise $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$ yi hesaplayınız.

Çözüm: Verilen $x^3 - x^2 + 1 = 0$ denkleminden $\dfrac{1}{x^2} = 1 - x$ denklemine ve buradan da, Vieta formulünü kullanarak
$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = (1-\alpha) + (1-\beta) + (1-\gamma) = 3 - (\alpha+\beta+\gamma) = 3 - 1 = 2$ bulunur.

12. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x + xy + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm:$x, xy, y, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{xy}$ ve $\dfrac{1}{y}$ terimlerinin çarpımları 1 olduğundan, geometrik ortalaması da 1 olur. Problemde verilen ifade bu terimlerin aritmetik ortalamasının 6 katıdır. Aritmetik Geometrik ortalama eşitsizliğinden, verilen ifadenin alabileceği en küçük değerin 6 olduğu sonucu çıkar. $x = y = 1$ için de ifade 6 ya eşit olur.

13. Bir tren, aralarındaki mesafe 20 km olan iki istasyon arasındaki yolculuğu daima aynı sürede tamamlamak zorundadır. Bir gün yolun tam ortasında durmak zorunda kalan tren 3 dakika bekledikten sonra, gecikmeyi telafi etmek için hızını 10 km/saat artırarak yoluna devam ediyor. Bir başka gün aynı noktada 5 dakika süre ile durmak zorunda kalan tren, yolculuğu zamanında tamamlamak için hızını ne kadar artırmalıdır?

Çözüm: Trenin normal hızını v km/saat, gecikmeyi telafi etmek için sahip olması gereken hızı da v_1 km/saat kabul edelim. Tren yolun ilk yarısını $\dfrac{10}{v}$ saatte tamamlar. İkinci yarısını ise, duraklama süresi de dahil olmak üzere 3 dakikalık gecikme olduğunda $\dfrac{10}{v+10} + \dfrac{1}{20}$ saatte, 5 dakikalık gecikme olduğunda ise $\dfrac{10}{v_1} + \dfrac{1}{12}$ saatte tamamlar. Yolculuğun ilk yarısı ile son yarısının aynı sürede tamamladığından $\dfrac{10}{v} = \dfrac{10}{v+10} + \dfrac{1}{20}$ ve $\dfrac{10}{v} = \dfrac{10}{v_1} + \dfrac{1}{12}$ olur. İlk denklemden elde edilen $(v-40)(v+50) = 0$ 'ın pozitif kökü $v = 40$ km/saat çözümünü verir. Bu değer yardımı ile ikinci denklemden de $v_1 = 60$ km/saat bulunur. Tren hızını 20 km/saat artırmalıdır.

14. $a + b + c > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığı biliniyor. Bu durumda $c > 0$ olduğunu gösteriniz.

Birinci Çözüm: $f(x) = ax^2 + bx + c$ olmak üzere bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $f(1) = a+b+c > 0$ olduğunu biliyoruz. Burada denklemin gerçel kökü olmadığından ve f fonksiyonu sürekli olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olur. Dolayısıyla $c = f(0) > 0$ olduğu görülür.

İkinci Çözüm: $c \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Denklemin gerçel kökü olmadığından

$b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır. $0 \leq b^2 < 4ac$ olduğundan $a < 0$ olur. $b > -a - c$ ve $a < 0$, $c \leq 0$, olduğundan $b > 0$ ve $-a - c > 0$ olur. Bu durumda $(a+c)^2 < b^2 < 4ac$ olur. $(a+c)^2 < 4ac$ ve $(a-c)^2 < 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Yani $c > 0$ olmalıdır.

15. a, b ve c sayıları

$$\begin{aligned} ab - a &= b + 119 \\ bc - b &= c + 59 \\ ca - c &= a + 71 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan pozitif gerçel sayılar olmak üzere $a + b + c$ toplamının alabileceği bütün değerleri bulunuz.

Çözüm:İlk denklemden $a(b-1) = (b-1) + 120$ buradan $(a-1)(b-1) = 120$ ve benzer şekilde $(b-1)(c-1) = 60$ ve $(a-1)(c-1) = 72$ bulunur. a, b ve c nin 1 den farklı oldukları açıktır. Bulunan eşitliklerden ilk ikisi oranlandığında elde edilen $\dfrac{a-1}{c-1} = 2$ ifadesini üçüncü eşitlikte kullanıldığında $2(c-1)^2 = 72$ bulunur ve buradan $|c-1| = 6$ çıkar. $c > 0$ olduğundan, $c = 7$ olmalıdır. Buradan $a = 13$ ve $b = 11$ olduğu da kolaylıkla bulunabilir. $a + b + c$ nin alabileceği tek değer 31 dir.

16. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesi içinde çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_5^2 - 23 \\ 4x_2 &= x_1^2 + 7 \\ 6x_3 &= x_2^2 + 14 \\ 8x_4 &= x_3^2 + 23 \\ 10x_5 &= x_4^2 + 34 \end{aligned}$$

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa toplarsak;
$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 55$ olur. Bu da
$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 6x_3 + x_4^2 - 8x_4 + x_5^2 - 10x_5 + 55 = 0$ yani
$(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-5)^2 = 0$ denklemine denktir. Denklemin sol tarafındaki hiçbir terim negatif olamayacağı için her biri sıfır olmak zorundadır. Böylece denklem sisteminin tek çözümünün

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

olur ve bu değerler soruda verilen beş denklemi de sağlar.

17. x, y, a gerçel sayılar olmak üzere

$$x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$$

olduğuna göre a nın alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: $(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 = a$ olduğundan $xy = \dfrac{a^2 - a}{2}$ olur. $(x + y)^3 - 3xy(x+y) = x^3 + y^3 = a$ olduğundan $a^3 - 3a\left(\dfrac{a^2-a}{2}\right) = a$ ve buradan da $a^3 - 3a^2 + 2a = a(a-1)(a-2)$ olur. Yani sorudaki koşulları sağlayan a sayısı $0, 1, 2$ dışında bir gerçel sayı olamaz. $x = 0 = y$ için $a = 0$, $x = 0, y = 1$ için $a = 1$, $x = 1 = y$ için $a = 2$ olduğundan a sayısının alabileceği tüm değerler $0, 1, 2$ dir.

18. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız.

$$2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

Çözüm: Bu eşitsizliği göstermek için $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ eşitsizliğini kullanacağız. Öncelikle

$$1.2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

$$2.2001 < \left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$2002.1 < \left(\frac{2003}{2}\right)^2$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak;

$$(1.2.3\ldots 2002)^2 < \left[\left(\frac{2003}{2}\right)^2\right]^{2002}$$

elde ederiz ki buradan

$$2002! < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$$

olduğu açıkça görülür.

19. f fonksiyonu, her pozitif n tam sayısı için, $f(n) = \dfrac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ şeklinde tanımlanıyor. $f(1) + f(2) + \cdots + f(40)$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm: $4n = (\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n-1})^2$ olduğundan

$$f(n) = \frac{\sqrt{2n+1}^2 + \sqrt{2n-1}^2 + \sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

şeklinde yazılabilir. Pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}^2 + \sqrt{2n-1}^2 + \sqrt{4n^2-1})}{(2n+1)-(2n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}^3 - \sqrt{2n-1}^3}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+\cdots+f(40) &= \frac{(\sqrt{3}^3 - \sqrt{1}^3) + (\sqrt{5}^3 - \sqrt{3}^3) + \cdots + (\sqrt{81}^3 - \sqrt{79}^3)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{81}^3 - \sqrt{1}^3}{2} \\ &= \frac{9^3 - 1^3}{2} \\ &= \frac{728}{2} \\ &= 364. \end{aligned}$$

20. Birbirinden farklı x, y, z tam sayıları $xy + yz + xz = 26$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ olduğunu gösteriniz.

    Çözüm: Genelliği bozmadan $x < y < z$ olduğunu kabul edebiliriz. $z - y \geq 1$, $y - x \geq 1$ ve $z - x \geq 2$ olduğu için $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 6$ ve $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq 3$ eşitsizlikleri geçerlidir. Bunun yanı sıra $xy + yz + xz = 26$ olmasından dolayı $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ dur.

21. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}$ dekleminin bütün gerçel köklerini bulunuz.

    Çözüm Denklemin gerçel sayılarda tanımlı olabilmesi için $x \geq -\frac{1}{2}$ olmalıdır. Denklemi şöyle düzenleyelim:

    $$\sqrt{2x+1} - 3 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}.$$

    Karekök artan bir fonksiyon olduğu için denklemin sağ tarafı pozitiftir. Dolayısıyla, sol taraf da pozitiftir. Yani, $\sqrt{2x+1} > 3$ ve $x > 4$.
    Denklemin iki tarafının da karesini alırsak,

    $$2x + 1 - 6\sqrt{2x+1} + 9 = x + 7 + x + 3 - 2\sqrt{(x+7)(x+3)},$$

$$3\sqrt{2x+1} = \sqrt{(x+7)(x+3},$$

$$18x + 9 = x^2 + 10x + 21,$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Elde edilen son denklemin kökleri $x = 2$ ve $x = 6$ dır. $x > 4$ olması gerektiğinden dolayı tek çözüm $x = 6$ dır.

Not: Bu tip denklem sorularında çözüm yaparken kare alıyorsak mutlaka en son bulduğumuz değerleri sorudaki denklemde yerine koyup denklemin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmeliyiz. Bazen, bu soruda olduğu gibi yalancı kökler (bu sorudaki $x = 2$ gibi) olabilir.

22. $z + \dfrac{1}{z} = 1$ ise $z^{2007} + \dfrac{1}{z^{2007}}$ kaçtır?

Çözüm $z + \dfrac{1}{z} = 1$ olduğundan $z^2 - z + 1 = 0$ olur. Denklemin her iki tarafını da $z+1$ ile çarparsak $z^3 + 1 = 0$, yani $z^3 = -1$ bulunur. Bu durumda $z^{2007} = (z^3)^{669} = (-1)^{669} = -1$. Bu değer denklemde yerine yazılarak $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$ bulunur.

23. a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

ise x, y ve z yi a, b, c cinsinden bulunuz.

Çözüm İlk iki eşitliği $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{c}{z} + \dfrac{a}{x}$ şeklinde yazarsak $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ olduğu görülür. Buradan $x = \dfrac{az}{c}, y = \dfrac{bz}{c}$, ve $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{a}{\frac{az}{c}} + \dfrac{b}{\frac{bz}{c}} = \dfrac{2c}{z}$. Bu durumda

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{\frac{a^2z^2}{c^2} + \frac{b^2z^2}{c^2} + z^2} = \frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4c^2}{z^2}$$

olur. $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ olduğundan $\dfrac{2c}{z} = \dfrac{4c^2}{z}$ ve $c \neq 0$ olduğundan $z = 2c$ olur ve buradan da $x = 2a$ $y = 2b$ $z = 2c$ bulunur.

24. a bir pozitif gerçel sayı olsun. Bu durumda $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$, $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ sayılarındandan hangisi daha büyüktür?

1. Çözüm: $(\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004})-(\sqrt{a+1003}-\sqrt{a})$ değerinin negatif olduğunu gösterirsek $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$ sayısının, $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ sayısından küçük olduğunu göstermiş oluruz. Göstermek istediğimiz eşitsizliği

$$\begin{aligned} (\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}) - (\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}) &< 0 \\ \sqrt{a+2007} + \sqrt{a} &< \sqrt{a+1003} + \sqrt{a+1004} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafı da her zaman pozitif olduğundan, iki tarafın karesini alarak

$$\sqrt{a^2+2007} < \sqrt{a^2+2007a+1004\cdot 1003}$$

elde ederiz. Burada a gerçel sayısı pozitif olduğundan, elde edilen eşitsizlik doğrudur. Dolayısıyla bütün pozitif a değerleri için $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$ sayısı, $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}$ sayısından küçüktür.

2. Çözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} &= \\ &= \frac{(\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004})(\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004})}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}} \\ &= \frac{(a+2007) - (a+1004)}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}} = \frac{1003}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}} \\ \sqrt{a+1003} - \sqrt{a} &= \\ &= \frac{(\sqrt{a+1003} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1003} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{(a+1003) - a}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}} = \frac{1003}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

olduğu için, bulduğumuz ifadeler

$$\sqrt{a+2007} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1003} + \sqrt{a+1004}$$

eşitsizliğini kanıtlar. Dolayısıyla verilen sayılar arasında, $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ ilişkisi vardır.

25. $2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1)$ denklemini sağlayan tüm a, b gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm 1. Verilen denklemi a bilinmeyeni için ikinci dereceden bir denklem gibi düşünürsek $a^2(b^2-b+2) - a(b+1)^2 + 2b^2 - b + 1 = 0$ elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = (b+1)^4 - 4(b^2-b+2)(2b^2-b+1) = -(b-1)^2(7b^2-2b+7)$ dir. $7b^2-2b+7 = 6(b^2+1)+(b-1)^2 > 0$ olduğundan denklemin gerçel çözümünün olması için $b = 1$ $(budurumda\Delta \geq 0)$ olmalıdır. Buradan $a = 1$ bulunur. Tek çözüm $(a, b) = (1, 1)$ dir.

Çözüm 2. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $2(a^2+1) \geq (a+1)^2, 2(b^2+1) \geq (b+1)^2$ ve $(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$ elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpıp sonra da iki tarafın karekökünü alırsak $2(a^2+1)(b^2+1) \geq |(a+1)(b+1)(ab+1)|$ eşitsizliğine ulaşırız. Eşitsizliğin eşitlik olması ancak ilk eşitsizliklerin eşitlik olması durumunda mümkündür ki bu da bize $a = b = 1$ verir.

26. Çarpmaya göre terslerinin toplamı -1 ve küplerinin toplamı 4 olan tüm gerçel sayıları bulunuz.

Çözüm: Sayılar x ve y olsun. Aradığımız sayılar $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$ ve $x^3 + y^3 = 4$ denklemlerini sağlarlar. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$ olduğundan $x + y = -xy$ ve $x^3 + y^3 = 4$ olduğundan $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 4$ ve buradan da $(xy)^3 - 3(xy)^2 + 4 = 0$ olur. $(xy+1)(xy-2)^2 = 0$ denkleminden $xy = -1$ veya $xy = 2$ sonucuna varılır.
$xy = -1$ için $x + y = 1$ olacağından $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 5$ ve $|x - y| = \sqrt{5}$ olur. $x \geq y$ kabul edersek $x - y = \sqrt{5},\ x + y = 1,\ x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ bulunur.
$xy = 2$ için $x + y = -2$ olacağından $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = -4 < 0$ olur. Yani bu durum imkansızdır.
Sonuç olarak çözüm olan tek (x, y) ikilisi $(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$ dir.

27. $f : \Re \to \Re$ fonksiyonu $f(1) = 1$ ve her x ve y gerçel sayıları için $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:$f(0) = 0$ olduğunu göstererek başlayalım:
$y = 0$ olsun. Her x gerçel sayısı için

$$f(x \cdot 0 + f(x)) = f(f(x)) = x \cdot f(0) + f(x)$$

eşitliği geçerlidir. $x = 0$ için de $f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + f(0) = f(0)$ olur.
$y = 0$, $x = f(0)$ için

$$\begin{aligned} f(0) &= f(f(0)) \\ &= f(f(0) \cdot 0 + f(f(0))) \\ &= f(f(f(0))) \\ &= f(0) \cdot f(0) + f(f(0)) \\ &= (f(0))^2 + f(0) \end{aligned}$$

Buradan da $f(0) = 0$ olduğu görülür.

Bunun bir sonucu olarak; $y = 0$ ve her x gerçel sayısı için $f(x \cdot 0 + f(x)) = x \cdot f(0) + f(x) = f(x)$, buradan da $f(f(x)) = f(x)$ bulunur. $x = 1$ ve her y gerçel sayısı için soruda verilen $f(1) = 1$ eşitliğini kullanarak $f(y+1) = f(1 \cdot y + f(1)) = 1 \cdot f(y) + f(1) = f(y) + 1$ buluruz. Bu eşitlikte y yerine $f(x)$ yazarsak, $f(f(x) + 1) = f(x) + 1$ denkleminin her x gerçel sayısı için sağlandığını görürüz. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1 + f(x) &= f(1 + f(x)) \\ &= f(xy + f(x)) \\ &= x \cdot f(y) + f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot f(y) = x \cdot f(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$$

olduğundan, sıfırdan farklı her x gerçel sayısı için, $f(x) = x$ olduğu görülür. Fakat $f(0) = 0$ olduğunu da göstermiştik. Bu nedenle, her x gerçel sayısı için $f(x) = x$ olduğu ispatlanmış olur.

Not: Bu tip fonksiyonel denklem sorularında en son bulunan f fonksiyonlarının soruda verilen koşulları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. Bazen sorudaki koşulları sağlamayabilir. Bu soruda $f(x) = x$ fonksiyonu $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$ denklemini bütün x, y gerçel sayıları için sağladığından ve $f(1) = 1$ olduğundan $f(x) = x$ bir çözümdür.

28. $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}$ eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm: Önce bir gözlem yapalım:

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^3} = \Big(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}\Big)^2$$

yazıp her iki tarafın karekökünü aldığımızda;

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \Big(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}\Big) = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}\\
&=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)\\
&=2004\cdot 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\\
&=2004+1-\frac{1}{2005}\\
&=2005-\frac{1}{2005}
\end{aligned}$$

29. a, b, c ve d, $a+b+c+d=1$ eşitliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır.

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc} &\leq \frac{a+b+c}{3}\\
abc &\leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{abc}{d+2}\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{d+2}\leq\left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{d+2}=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{d+2}<\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{54}$$

eşitsizliğini elde edilir. Benzer şekilde $\frac{bcd}{a+2}$, $\frac{acd}{b+2}$ ve $\frac{abd}{c+2}$ 'nin de $\frac{1}{54}$ 'ten küçük olduğu bulunabilir. O halde

$$\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{1}{54}<4\cdot\frac{1}{54}<\frac{1}{13}$$

olur.

30. x bir gerçel sayı olmak üzere $x^2-3x+1=0$ ise $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}$ nin değerini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen denklemden $x+\frac{1}{x}=3$ elde edilir. Öte yandan, hesaplanması istenen ifade $(x^8+x^{-8})(x+x^{-1})$ şeklinde çarpanlara ayrılabilir. İlk çarpanı hesaplamak için $x+\frac{1}{x}=3$ denkleminde iki tarafın karesi alınarak $x^2+x^{-2}=7$ ve bu ifadenin de karesi alınarak $x^4 + x^{-4} = 47$ ve bir kez daha kare alınarak $x^8 + x^{-8} = 2207$ elde edilir. Aranan ifadenin sayı değeri 6621 dir.

31. M kümesi 20 tane farklı gerçel sayıdan oluşmaktadır. M kümesinden alınacak olan her $a, b \in M$ için $a < -x < b$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in M$ bulunduğu biliniyor. M kümesinde kaç tane pozitif sayı bulunabilir?

Çözüm: $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ olmak üzere $M = \{a_1, a_2, \cdots a_{20}\}$ olsun. M de bulunan pozitif olmayan elemanların sayısı pozitif olanlardan fazla ise en azından 11 tane pozitif olmayan eleman var demektir ($a_{11} = 0$ olması mümkün). Bu durumda verilen şarta göre

$$a_1 < -x_1 < a_2 < -x_2 < a_3 < -x_3 < \cdots a_{10} < -x_{10} < a_{11}$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_1, \cdots x_{10}$ pozitif sayıları bulunmalıdır. Buradan $x_1, \cdots x_{10}$ pozitif sayılarının her birinin farklı olması gerektiği görülür. Bu da M'nin en azından 21 eleman içermesini gerektirir ki bu bir çelişkidir. Buna göre M de bulunan pozitif olan elemanların sayısı pozitif olmayanlardan az olamaz. Benzer şekilde M de bulunan negatif olan elemanların sayısı negatif olmayanlardan az olamaz. Sonuç olarak M'de bulunan pozitif olan elemanların sayısı 10'dur.

32. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir geometrik dizidir. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 5$ olduğuna göre $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ çarpımını hesaplayınız.

Çözüm: Verilen dizi bir geometrik dizi olduğundan bir r gerçel sayısı için $a_2 = ra_1$, $a_3 = r^2 a_1$ ve $a_4 = r^3 a_1$ yazılabilir ve

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1(1 + r + r^2 + r^3) = a_1 \left(\frac{1 - r^4}{1 - r} \right) = 7$$

ve

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - r^4}{r^3(1 - r)} = 5$$

elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa bölünerek $a_1^2 r^3 = \dfrac{7}{5}$ bulunur. Öte yandan $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1^4 r^6 = (a_1^2 r^3)^2$ olduğundan $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = \left(\dfrac{7}{5} \right)^2 = \dfrac{49}{25} = 1,96$ olur.

33. Her $n > 2$ tamsayısı için $(n!)^2 > n^n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(n!)^2$ ifadesini
$(1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) (1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))(3 \cdot (n-2)) \cdots (k \cdot (n - k + 1)) \cdots (n \cdot 1)$ şeklinde yazabiliriz. Öte yandan, her $1 < k < n$ tam sayısı için

$k(n-k+1)-n = nk-k^2+k-n = (n-k)(k-1) > 0$ olduğundan, $k(n-k+1) > n$ olur ve bu da iddiayı kanıtlar.

34.

$$\frac{1}{998}\left(\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2-1^2-2}+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+2^2-2}+\ldots+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+1995^2-2}\right)=1995$$

denklemini sağlayan tüm gerçel x sayılarını bulunuz.

Çözüm: $k = 1, 2, \ldots, 1995$ için

$$\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+k^2-2} = \sqrt{k^2-(x-\sqrt{2})^2} \leq k$$

gözlemini kullanarak

$$\frac{1}{998}\left(\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2-1^2-2}+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+2^2-2}+\ldots+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+1995^2-2}\right) \leq$$

$$\frac{1}{998}(1+2+\ldots+1995) = 1995$$

olduğunu, dolayısıyla da eşitliğin ancak ve ancak $x = \sqrt{2}$ durumunda gerçekleşeceğini gösterebiliriz. Tek çözüm $x = \sqrt{2}$ dir.

35. x,y ve z gerçel sayılarının,

$$x^2+yz \leq 2,$$
$$y^2+xz \leq 2,$$
$$z^2+xy \leq 2,$$

eşitsizliklerini sağladığı biliniyorsa $x+y+z$ nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

Çözüm:$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ olduğundan $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ ve buradan da $\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \geq (x+y+z)^2$ olur. Soruda verilen eşitsizllikleri taraf tarafa toplarsak $(x+y+z)^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \leq \frac{3}{2}6 = 9$ ve buradan da $-3 \leq x+y+z \leq 3$ bulunur. Eşitlik durumu ise $x=y=z=-1$ iken ve $x=y=z=1$ iken sağlanır.

Not: Bir soruda verilen bir k değişkeninin alabileceği en küçük ve en büyük değerler sorulduğunda k için $k \leq p$ veya $k \geq q$ gibi eşitsizliklerin sağlandığını göstermemiz k sayısını alabileceği en büyük değerin p, en küçük değerinde q olmasını gerektirmez. k sayısının p ve q sayılarına da eşit olabileceğini ispatlamamız gerekir.

36. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirlerinden farklı pozitif tam sayılar ve m sayısı, $\{a_i + a_j,\ i \neq j\}$ kümesinin eleman sayısı olsun. m en az kaç olabilir ?

Çözüm: Genelliği bozmadan $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ kabul edelim.

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte en az $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ tane farklı toplam vardır. Çünkü en küçük toplam 3, en büyük toplam en az $(n-1)+n = 2n-1$ olabilir. Yani en az $2n-3$ tane birbirinden farklı toplam vardır.

37. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{N}_0$ için $f(3x+2y) = f(x)f(y)$ koşulunu sağlayan bütün $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 0$ için $f(0) = f(0)^2$ dir. Yani $f(0) = 0$ veya $f(0) = 1$ dir.
$f(0) = 0$ ise her $x, y \in \mathbb{N}_0$ için $f(2y) = f(3x)$ dir. $f(1) = a$ için $f(5) = f(3\cdot1+2\cdot1) = a^2$. Benzer şekilde $f(25) = a^4$. Ayrıca $f(25) = f(2\cdot2+3\cdot7) = 0$. Dolayısıyla $a = 0$ dır. Her $k > 4$ sayısı $k = 3x+2y$ formunda yazılabildiği için uygun x ve y değerleri ile her k için $f(k) = 0$ dır.
$f(0) = 1$ ise $f(2y) = f(y)$ ve $f(3x) = f(x)$ dir. $f(1) = a$ dersek, $f(2) = a, f(5) = a^2, f(25) = a^3 = a^4$ bulunur. Dolayısıyla, $a = 0$ veya $a = 1$ dir.

Sonuç olarak,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0; \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

ya da her $x \in \mathbb{N}_0$ için $f(x) = 1$ dir .

38. Hangi a gerçel sayıları için

$$x + y = a^3 - a$$

$$xy = a^2$$

denklem sisteminin gerçel x ve y çözümleri vardır?

Çözüm:İlk denklemden x'i çözerek $x = a^3 - a - y$ bulup diğer denklemde yerine yazalım;

$$\begin{aligned} xy &= a^2 \\ (a^3 - a - y)y &= a^2 \\ y^2 + y(a - a^3) + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Elde edilen denklemin gerçel kökleri olması için diskriminantın sıfıra eşit ya da sıfırdan büyük olması gerekir.

$$\begin{aligned}\Delta &= (a-a^3)^2-4a^2\\ &= a^2(a^2+1)(a^2-3)\end{aligned}$$

$\Delta \geq 0$ eşitsizliği ancak $a=0$ veya $a^2-3\geq 0$ durumlarında sağlanır.

39. Doğal sayılarda tanımlı, her $m,n\in\mathbb{N}$ değeri için

- $f(f(2002))=17$
- $f(mn)=f(m)f(n)$
- $f(n)\leq n$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu tanımlanabilir mi?

Çözüm: $f(mn)=f(m)f(n)$ koşulunu ve $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ olduğunu kullanarak

$$f(f(2002))=f(f(2))\cdot f(f(7))\cdot f(f(11))\cdot f(f(13))=17$$

eşitliği elde edilir. $f(n)\leq n$ ise

$$f(f(n))\leq f(n)\leq n$$

dolayısıyla da $f(f(2))\leq 2$, $f(f(7))\leq 7$, $f(f(11))\leq 11$ ve $f(f(13))\leq 13$ olur. Elde edilen eşitliğin sağ tarafında bir asal sayı olan 17 varken, eşitliğin sol tarafında ise 17'den küçük tamsayıların çarpımı vardır. Bu tamsayıların çarpımı 17 olamayacağından verilen koşulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

40. S kümesi, 1 den büyük tam sayılar kümesinin boş olmayan bir alt kümesidir. A sayısı, S kümesindeki elemanların çarpmaya göre terslerinin toplamı olsun. A bir tam sayı ise S kümesinin en az 3 elemanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: S kümesinin eleman sayısı $n(S)=1$ olması durumunda $S=\{a\}$ diyelim. Ancak $\frac{1}{a}$ tam sayı olmadığından A sayısı da tam sayı olamaz. O halde S kümesi bir elemanlı değildir. $n(S)=2$ ve $a\neq b$ olmak üzere $S=\{a,b\}$ alalım. $a<b$ olsun.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}\leq 2$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<2$ ve tamsayı olduğu için $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 'dir. Ancak bu koşulu sağlayan (a,b) sayı çifti olmadığından S kümesi iki elemanlı da değildir. Yani $n(S)\geq 3$ olmalıdır.

Eğer $S = \{2, 3, 6\}$ ise $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ olur. Bu da S kümesinin 3 elemanlı olabileceğini gösterir.

41. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{a+b+x} \\
\frac{(a+b)x + ab}{abx} &= \frac{1}{a+b+x} \\
(a+b)x^2 + (a+b)^2 x + (a+b)ab &= 0
\end{aligned}$$

$a = -b$ ise, sıfırdan farklı her x sayısı verilen denklemi sağlar. $a \neq -b$ ise denklem

$$(x+a)(x+b) = 0$$

olarak çarpanlarına ayrılır. Buradan da denklemin kökleri $x = -a$ ve $x = -b$ olarak bulunur.

42. a pozitif gerçel sayısı $a^3 = 6(a+1)$ denklemini sağlıyor ise $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ denkleminin gerçel çözümü olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Denklemin gerçel çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\Delta = 3(8 - a^2) \geq 0$, yani $a \leq 2\sqrt{2}$ olmalıdır. $a^3 = 6(a+1)$ olduğundan $a^2 = 6(1 + \frac{1}{a})$ ve $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olduğundan $a^2 \geq 6(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}) = 6 + \frac{3\sqrt{2}}{2} > 6 + 2 = 8$ olur ve $a^2 \geq 8$, buradan da $a > 2\sqrt{2}$ bulunur. $a \leq 2\sqrt{2}$ olması gerektiğinden bu bir çelişkidir.

43. x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun.

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: a ve b gerçel sayıları için $(a-b)^2 \geq 0$ olur. Buradan $a^2 + b^2 \geq 2ab$ olduğunu görürüz. Bu durumda her x, y pozitif gerçel sayısı için $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ olur.

Bu çıkarım yardımıyla $x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2yz}$ eşitsizliğini elde eder ve dolayısıyla

$$\frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$$

olduğunu görürüz.

Bu durumda;
$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} + \frac{\sqrt{zx}}{2xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{2xyz} = \frac{1}{2xyz}\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)$$
olur.

Tekrar yukarıdaki çıkarımı kullanarak $\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \leq \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} + \frac{x+y}{2} = x+y+z$ olduğunu görürüz.

Dolayısıyla $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2xyz}(x+y+z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$
olur. Eşitlik $x = y = z$ durumunda sağlanır.

44. $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi, $m \geq n$ olmak üzere negatif olmayan tüm m ve n tam sayıları için $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ eşitliğini sağlamaktadır.
$a_1 = 3$ ise a_{2008} i bulunuz.

Çözüm:
$m = 0 = n$ alınarak $2a_0 - 1 = \frac{1}{2}2a_0$ ve buradan da $a_0 = 1$ olduğu görülür.
$n = 0$ kabul ederek $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ ilişkisi elde edilir. Burada $m = 1$ için $a_2 = 7$ ve $m = 2$ için $a_4 = 21$ bulunur. $m = 2$ ve $n = 1$ için de $a_3 = 13$ olur. Bu bilgilerden yararlanarak $a_n = n^2 + n + 1$ olduğunu tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayacağız.

- $a_0 = 1$ ve $a_1 = 3$ olduğunu elde ettik.
- Önermemizin tüm $k \leq m$ ler için doğru olduğunu varsayalım.
- Yukarıda bulduğumuz $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ ilişkisini kullanarak $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$ olduğunu buluruz.
- Burada $2m$ gördüğümüz yere $m + 1$ yazarsak $a_{m+1} = (m + 1)^2 + (m + 1) + 1$ buluruz.

Sonuç olarak $a_{2008} = (2007 + 1)^2 + (2007 + 1) + 1 = (2008)^2 + 2009$ olur.

45. $4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0$ denkleminin dört gerçel kökü ve bunlardan iki tanesinin toplamı 1 olduğuna göre denklemin bütün köklerini bulunuz.

Çözüm: Kökler x_1, x_2, x_3, x_4 ve $x_1 + x_2 = 1$ olsun. Bu durumda kökler toplamı $\frac{12}{4} = 3$ olması gerektiği için $x_3 + x_4 = 2$ olur.

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

denklemin her iki tarafında x'in kuvvetlerinin katsayıları eşit olacağından

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 3 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 &= -\frac{7}{4} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 &= -\frac{11}{2} \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4 &= -\frac{7}{4} \\ (x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2 &= -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

Burada da $x_1+x_2=1$ ve $x_3+x_4=2$ değerlerini yerlerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned} x_1x_2+x_3x_4 &= -\frac{15}{4} \\ 2x_1x_2+x_3x_4 &= -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz ki buradan çözümlerin

$$x_1x_2=-\frac{7}{2} \quad \text{ve} \quad x_3x_4=-2$$

olduğu görülür. Bu durumda $x_1+x_2=1$ ve $x_1x_2=-\frac{7}{2}$ olduğu için x_1 ve x_2'nin $x^2-x-\frac{7}{4}=0$ denkleminin çözümleri olduğu yani $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$ olduğu açıkça görülmektedir.

Aynı şekilde $x_3+x_4=2$ ve $x_3x_4=-2$ olduğu için $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$ olur.

Bu kökler soruda verilen denklemi de sağlarlar. Dolayısıyla verilen denklemin kökleri; $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{3}$ ve $1-\sqrt{3}$'tür.

46. $p(x)=x^3-2007x+2002$ polinomunun kökleri r, s ve t olsun. Bu durumda

$$\frac{r-1}{r+1}+\frac{s-1}{s+1}+\frac{t-1}{t+1}$$

değerini bulunuz.

Birinci Çözüm: İstenen toplama S dersek,

$$R=\frac{1}{r+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{t+1}$$

olmak üzere $S = 3 - 2R$ olur. Ayrıca

$$q(x) = p(x-1) = x^3 - 3x^2 - 2004x + 4008$$

polinomunun köklerinin $r+1$, $s+1$, $t+1$ olduğu açıktır. Bu durumda, bir $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ polinomunun köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı $-c_0/c_1$ olduğundan, $R = -(-2004)/4008 = 1/2$, dolayısıyla da $S = 3 - 1 = 2$ olarak bulunur.

İkinci Çözüm: $S = \dfrac{r-1}{r+1} + \dfrac{s-1}{s+1} + \dfrac{t-1}{t+1}$ ve $R = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1}$ olsun.
$R = \dfrac{(s+1)(t+1) + (r+1)(t+1) + (r+1)(s+1)}{(r+1)(s+1)(t+1)} = \dfrac{st + rt + rs + 2(r+s+t) + 3}{st + rt + rs + s + r + t + rst + 1}$
dir. $r+s+t = 0$, $rs + st + rt = -2007$, $rst = -2002$ olduğundan (Vieta Teoremi), $R = \dfrac{-2004}{-4008} = \dfrac{1}{2}$ olur. Buna göre $S = 3 - 2R = 2$ dir.

47.

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$$

denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemi

$$y^4 + 4y^2x + y^2 - 12y^2 + 4xy - 8y + 4x^2 + 4x^2 - 24x - 16x + 36 + 16 = 0$$

şekline getirip iki tam kare toplamı halinde yazalım.

$$\begin{aligned} &= y^4 + 4y^2x + 4x^2 - 12y^2 - 24x + 36 + 4x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 8y + 16 = 0 \\ &= (y^2 + 2x - 6)^2 + (2x + y - 4)^2 = 0 \end{aligned}$$

İki kare toplamının sıfıra eşit olabilmesi için her iki karenin de ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. O halde bu denklemin köklerinin $y^2 + 2x - 6 = 0$ ve $2x + y - 4 = 0$ denklemlerini sağlaması gerekir. Buradan kökler

$$\begin{aligned} 2x + y - 4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x = 4 - y \\ &\Rightarrow \quad y^2 + 2x - 6 = y^2 + 4 - y - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = 2, y = -1 \\ &\qquad\;\; y = 2 \Rightarrow x = 1 \\ &\qquad\;\; y = -1 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani denklemin kökleri $(1,2)$ ve $(\frac{5}{2}, -1)$ 'dir.

48. Tüm $a, b, c > 0$ gerçel sayıları için $1 + \dfrac{3}{ab + bc + ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ eşitsizliğinin doğruluğunu

ispatlayınız.

Çözüm: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ olduğundan $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ve $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$ olur. $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq 1+\dfrac{9}{(a+b+c)^2}$ ve $(1-\dfrac{3}{a+b+c})^2 \geq 0$, $1+\dfrac{9}{(a+b+c)^2} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ olduğundan $1+\dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$ olur.

49. $f(x) = x^2+(m+3)x+m+2$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması için m parametresinin alabileceği bütün gerçel değerleri bulunuz.

(a) Her $x \in (-1,3)$ için $f(x) < 0$,

(b) f fonksiyonun köklerinin terslerinin toplamı $\frac{1}{3}$ ten daha küçük olmalı.

Çözüm:

Birinci çözüm: f ikinci dereceden ve pozitif başkatsayılı bir denklem olduğu için birinci koşul $f(-1) \leq 0$ ve $f(3) \leq 0$ koşuluna denktir. Yeni koşulu eşitsizlik sistemi olarak yazarsak:

$$1-m-3+m+2 \leq 0,$$

$$9+3m+9+m+2 \leq 0.$$

Birinci denklem her zaman doğrudur $(0 \leq 0)$. İkinci denklemden $m \leq -5$ bulunur. İkinci koşulu gözönüne aldığımızda, x_1 ve x_2 f fonksiyonun kökleri olmak üzere, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}$ dür. Vieta formülüne göre kökler toplamı $-m-3$ ve kökler çarpımı $m+2$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-m-3}{m+2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{-(4m+11)}{3(m+2)} < 0.$$

Yani ya $m+2 < 0$ ve $-(4m+11) > 0$ olmalı ya da $m+2 > 0$ ve $-(4m+11) < 0$ olmalı.

- $m+2 > 0$ ve $-(4m+11) < 0$ ise $m > -2$ ve $m < -\frac{11}{4}$ olur. Ayrıca $m \leq -5$ idi. Bu üç kümenin kesişimi boş olduğu için bu koşullarda çözüm yoktur.

- $m+2<0$ ve $-(4m+11)>0$ ise $m<-2$ ve $m<-\frac{11}{4}$ olur. Ayrıca $m \leq -5$ idi. Üç koşulu birden sağlayan çözüm aralığı $(-\infty, 5)$ dir.

İkinci çözüm: İlk çözümde $m \leq -5$ bulunmuştu. İki kökten x_1 küçük olan kök ve x_2 büyük olan kök olmak üzere, her $x \in (1,3)$ iken $f(x)<0$ olduğu için $x_1 \leq -1$ ve $x_2 \geq 3$ dür. Yani, $\frac{1}{x_1}<0$ ve $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{3}$ dür. İkinci koşulu test edersek,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

buluruz. Dolayısıyla $m \in (-\infty, -5]$ dır.

50. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm:

Birinci çözüm: Verilen $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ eşitliğinin her iki tarafını abc ile çarptığımızda

$$ab+bc+ca=abc$$

eşitliğini elde ederiz.

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1$$

Bu eşitlikte abc yerine eşitlik verilen denklemi kullanarak

$$(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-1$$

yazabiliriz. Ayrıca, Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden;

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=3$$

ve buradan da $(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-1 \geq 8$ olur.

İkinci çözüm: $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}$ olduğundan, $(a-1)(b-1)(c-1)=a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ olur. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ ve buradan da $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, $(a-1)(b-1)(c-1)=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8$ olur.

51. a, b, c sıfırdan büyük gerçel sayılardır.

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a ve b sıfırdan büyük oldukları için

$$\begin{aligned}(a-b)^2(a+b) &\geq 0\\ (a^2-2ab+b^2)(a+b) &\geq 0\\ a^3-2a^2b+ab^2+a^2b-2ab^2+b^3 &\geq 0\\ a^3-a^2b-ab^2+b^3 &\geq 0\\ \frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{b^2} &\geq 0\\ \frac{a^3}{b^2}-\frac{a^2}{b}-a+b &\geq 0\\ \frac{a^3}{b^2} &\geq \frac{a^2}{b}+a-b\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\frac{b^3}{c^2}\geq\frac{b^2}{c}+b-c$ ve $\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{c^2}{a}+c-a$ bulunur. Bulunan bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplandığında

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+a-b+\frac{b^2}{c}+b-c+\frac{c^2}{a}+c-a=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

elde edilir.

52. a, b, c ile $x^3-x^2+2=0$ denkleminin köklerini gösterelim. Bu durumda $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ ve $a^4+b^4+c^4$'ün değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ olan n inci dereceden bir polinom için köklerinin kuvvetlerinin toplamları hakkında bilgi veren Vieta formüllerini hatırlayalım: $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots,\alpha_n^k$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}a_0s_1+a_1 &= 0\\ a_0s_2+a_1s_1+2a_2 &= 0\\ a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3 &= 0\\ \cdots\end{aligned}$$

olur. Buna göre $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=1^2-2(0)=1$'dir.

Öte yandan $x^3 = x^2 - 2$ olduğundan,
$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 1 - 6 = -5$ dir.
Son olarak $x^3 = x^2 - 2$ olduğundan $x^4 = x^3 - 2x$ alabiliriz ve buradan
$a^4+b^4+c^4 = a^3-2a+b^3-2b+c^3-2c = a^3+b^3+c^3-2(a+b+c) = -5-2(1) = -7$
buluruz.

53.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x^2+y^2+z^2 &= 3 \\ x^3+y^3+z^3 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm gerçel (veya karmaşık) çözümlerini bulunuz.

Çözüm: x, y, z ile $p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz$ polinomunun köklerini gösterelim. Bu durumda $xy + yz + zx = (x + y + z)^2/2 - (x^2 + y^2 + z^2)/2 = 9/2 - 3/2 = 3$ çıkar. Öte yandan $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ denkleminden $xyz = 1$ bulunur. Sonuç olarak $p(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$ dür. Yani $x = y = z = 1$ verilen sistemin tek çözümüdür.

54. $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört kökü olmasını ve köklerinin aritmetik dizi oluşturmasını sağlayacak bütün a gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: Denklem $t = x^4$ dönüşümü ile t ye göre ikinci dereceden $t^2 + at + 1 = 0$ denkleme dönüşür ve bu denklemin kökleri $t_1, t_2 > 0$ ise ilk denklemin kökleri $\pm\sqrt[4]{t_1}$ ve $\pm\sqrt[4]{t_2}$ olur. Genelliği bozmadan $t_1 \leq t_2$ olduğunu kabul edelim. $-\sqrt[4]{t_2} \leq -\sqrt[4]{t_1} \leq \sqrt[4]{t_1} \leq \sqrt[4]{t_2}$ olacağından, bir aritmetik dizi oluşturmaları için $-\sqrt[4]{t_2}+\sqrt[4]{t_1} = -2\sqrt[4]{t_1}$ ve $t_2 = 81t_1$ olmalıdır. $t_1t_2 = 1$ olduğundan $81t_1^2 = 1,\ t_1 = \dfrac{1}{9},\ t_2 = 9$ olur $(t_1, t_2 > 0)$.
$-a = t_1 + t_2 = \dfrac{82}{9}$ ve buradan da $a = -\dfrac{82}{9}$ bulunur.

55. Her $0 < x < 1$ gerçel sayısının, 1 den küçük iki pozitif gerçel sayının farkı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm:
Birinci Çözüm: Herhangi bir $0 < x < 1$ gerçel sayısı için

a-) $x \in Q$ ise: $x_0 \in R\backslash Q$ ve $x_0 > 0$ olsun. $y_2 = x + \frac{x_0}{n} < 1$ olacak şekilde $n \in N^*$ bulunabilir. $0 < y_2 < 1$ ve $y_2 \in R\backslash Q$ dir. Eğer $y_1 = \frac{x_0}{n}$ ise $0 < y_1 < 1$ ve $y_1 \in R\backslash Q$ dir. Açıkça, $x = y_2 - y_1$ dir.

b-) $x \in R\backslash Q$ ise: $x+\frac{x}{n} < 1$ olacak şekilde $n \in N^*$ ı gözönüne alalım. Eğer $y_2 = x+\frac{x}{n}$ ve $y_1 = \frac{x}{n}$ ise $y_1, y_2 \in R\backslash Q$ ve $x = y_2 - y_1$ dir.

İkinci Çözüm: $0 < x < 1$ iken $0 < \dfrac{1-x}{2} < \dfrac{1+x}{2} < 1$ olacağından $\dfrac{1+x}{2} - \dfrac{1-x}{2} = x$ şeklinde yazabiliriz.

56. $xyz(x+y+z) = 1$ koşulunu sağlayan x, y, z pozitif gerçel sayıları için

a-) $\sqrt{(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2})} = (x+y)(y+z)(z+x)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b-) Verilen denklemi sağlayan bir (x, y, z) üçlüsü bulunuz.

Çözüm:

a-) $xyz(x+y+z) = 1$ den

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{xyz(x+y+z)}{y^2} = x^2 + \frac{xz(x+y+z)}{y}$$

$$= \frac{x^2y + xz(x+y+z)}{y} = \frac{x(y+z)(x+z)}{y}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(x+z)(x+y)}{z}$$

ve

$$z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(x+y)(z+y)}{y}$$

elde edilir. Bulunan üç ifadenin çarpımından

$$(x^2+\frac{1}{y^2})(y^2+\frac{1}{z^2})(z^2+\frac{1}{x^2}) = (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$$

bulunur.

b-) $x = y = 1$ alınırsa $z(z+2) = 1$ denkleminin çözümünden karşılık gelen $z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ değeri bulunur. Başka bir çözüm ise $x = y = z$ alınarak bulunabilir. Bu durumda $3x^4 = 1$ in çözümünden $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ bulunur.

57. $a, b, c, x, y, z \in \Re$ ve x, y, z sıfırdan farklı olmak üzere

$$ax^3 = by^3 = cz^3$$

ve

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

ise $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
Birinci Çözüm:

$$\begin{aligned} A = \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} &= \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} \\ &= \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \\ &= \sqrt[3]{ax^3} \\ &= x\sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

Buradan $A = x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$ olur.

$$\begin{aligned} A = \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} &= A \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z} \\ &= \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \end{aligned}$$

İkinci Çözüm: $ax^3 = by^3 = cz^3 = k$ dersek $a = \dfrac{k}{x^3}$, $b = \dfrac{k}{y^3}$, $c = \dfrac{k}{z^3}$ olur.
$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}x^2 + \dfrac{k}{y^3}y^2 + \dfrac{k}{z^3}z^2} = \sqrt[3]{k\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)} = \sqrt[3]{k}$ olur.
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{k}{y^3}} + \sqrt[3]{\dfrac{k}{z^3}} = \sqrt[3]{k}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{k}$ ve buradan da
$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ bulunur.

58. $(x^3+3x-4)^3 + (2x^2-5x+3)^3 = (3x^3-2x^2-1)^3$ denklemini sağlayan tüm x gerçel sayıları bulunuz.

Çözüm: $u = x^3+3x-4$, $v = 2x^2-5x+3$ olsun. Denklem $u^3+v^3 = (u+v)^3$ olarak yazılabilir. Buradan $3uv(u+v) = 0$ bulunur. Buradan da $u = 0$ veya $v = 0$ ya da $u+v = 0$ çıkar.
$u = x^3+3x-4 = 0 = (x-1)(x^2+x+4)$ ise $x^2+x+4 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{15}{4} > 0$ olduğundan $x = 1$ bulunur.
$v = 2x^2-5x+3 = 0 = (2x-3)(x-1)$ ise $x = 1$ veya $x = \dfrac{3}{2}$ bulunur.
$u+v = x^3+2x^2-2x-1 = 0(x-1)(x^2+3x+1)$ ise $x = 1$ veya $x = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ olur.

Sonuç olarak verilen denklemlerin gerçel kökleri

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

dir.

59. $\lfloor x \rfloor$, ile x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.

$$x + \lfloor \frac{x}{6} \rfloor = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2x}{3} \rfloor$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm: x, verilen denklemi sağlıyor ise $x = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2x}{3} \rfloor - \lfloor \frac{x}{6} \rfloor (*)$ 'dır. Eşitliğin sağ tarafı tamsayı olduğu için x de bir tamsayıdır. En büyük payda 6 olduğu için $x = 6k + t$ diyelim. Burada t, x 'in 6 ile bölümünden kalan, k da bölümdür. $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için (*) eşitliğini kontrol edersek, $t = 1$ dışında bütün t değerleri için eşitliğin sağlanmakta olduğu kolayca görülebilir. O halde 6 ile bölündüğünde 1 kalanı vermeyen bütün x sayıları verilen denklemi sağlamaktadır.

60. $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere,
$f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ fonksiyonu her $m, n \in \mathbf{N}_0$ için

- $f(n+1) > f(n)$
- $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur. Buna göre $f(2001)$ 'in alabileceği tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm: k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $f(0) = k$ olsun. Verilen ikinci koşuldan

$$\begin{aligned} f(n + f(0)) &= f(n) + 0 + 1 \\ f(n+k) &= f(n) + 1 \qquad (*) \end{aligned}$$

$k = 0$ ise $f(n) = f(n) + 1$ olur ki bu da imkansızdır. O halde $k \neq 0$.
$f(n+k-1) < f(n+k) = f(n)+1$ (**) 'dir. Ancak eğer $k > 1$ olursa $n+k-1 \geq n+1$ olur. İlk koşuldan $f(n+k-1) \geq f(n+1) \geq f(n)+1$ (***) elde edilir. Fakat (**) ve (***) çeliştiği için $k = 1$ olmalıdır.
$k = 1$, (*) denkleminde yerine yazılırsa $f(n+1) = f(n) + 1$ elde edilir ki buradan da $f(2001) = 2002$ olur. k 'nın tek değeri 1 olduğu için verilen koşulları sağlayan tek f fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $f(2001)$ nin olası tek değeri 2002 'dir.

61. Eğer α, β, γ sayıları $x^3 - x - 1$ denkleminin kökleri ise,

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm:
Birinci Çözüm: Verilen ifade

$$2\left(\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma}\right) - 3$$

şeklinde yazılabilir. $P(x) = x^3 - x - 1$'in kökleri α, β, γ olduğuna göre $P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$'in kökleri $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$'dir. $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ şeklindeki bir polinomun köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı $-c_1/c_0$ olduğundan, verilen ifade 2(2)-3=1 olarak hesaplanır.

İkinci Çözüm: $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma} = S$ dersek $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = 2S - 3$ olur.
$S = \frac{3 + 2(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma} = \frac{3 + 2 \cdot 0 - 1}{1 + 0 - 1 + 1} = 2$ ve $2S - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ bulunur.

62. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) f(1)=1,

(ii) $f(x) \geq 0$

(iii) eğer x, y, ve $x + y$ hepsi $[0,1]$ aralığında ise $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$

şartlarını sağlamaktadır. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle Tümevarım yöntemi ile her $k \geq 0$ tam sayısı için $f(\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ olduğunu gösterelim. Her $x \in [0,1]$ için $2f(x) \leq f(2x)$ ve $f(1) = 1$ olduğundan $f(\frac{1}{2^u}) \leq \frac{1}{2^u}$ ise $2f(\frac{1}{2^{u+1}}) \leq f(\frac{1}{2^u}) \leq \frac{1}{2^u}$ ve buradan da $f(\frac{1}{2^{u+1}}) \leq \frac{1}{2^{u+1}}$ olur. Böylece Tümevarım biter. Her $x \in (0,1)$ için $\frac{1}{2^{m+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^m}$ şartını sağlayan bir m pozitif tam sayısı bulunabilir. Bu durumda $f(\frac{1}{2^m}) \geq f(x) + f(\frac{1}{2^m} - x)$ ve $f(\frac{1}{2^m} - x) \geq 0$ olduğundan $f(\frac{1}{2^m}) \geq f(x)$ olur. Buradan $f(x) \leq f(\frac{1}{2^m}) \leq \frac{1}{2^m} \leq 2x$ bulunur. Böylece her $x \in (0,1)$ için $f(x) \leq 2x$ olduğunu göstermiş olduk. $f(1) = 1 < 2$ ve $f(0) \geq 2f(0) \geq 0$ olduğundan $f(0) = 0$ olur. Sonuç olarak $f(x) \leq 2x$ eşitsizliği tüm $x \in [0,1]$ için geçerlidir.

63. n bir pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_n$ birer tamsayı olmak üzere

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n^2$$

olduğu biliniyor.Buna göre

a-) $x_1, x_2, \cdots, x_n$'den hiçbirinin negatif olamayacağını gösteriniz.

b-) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1$'in bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

a-) Verilen eşitsizliğin

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + \cdots (x_n - n)(x_n - n + 1) \leq 0$$

eşitsizliğine denk olduğu hemen görülebilir. Ardışık iki tam sayının çarpımı negatif olamayacağı için

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) = (x_2 - n)(x_2 - n + 1) = \cdots = (x_n - n)(x_n - n + 1) = 0$$

olması gerekir. Buna göre $x_k \in \{n-1, n\} \forall k$ çıkar.

b-)

$$n(n-1) \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n^2$$

olduğundan

$$n^2 < 1 + n^2 \leq 1 + n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1 + n + n^2 < (n+1)^2$$

dir. Buradan $1 + n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$'in bir tam kare olamayacağı anlaşılır.

64. Eğer $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümeleri aynı ise (elemanlar farklı sırada yazılmış olabilir)

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: $a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3,\ c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$ olarak tanımlanan a, b, c'ye

Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 9} = \sqrt[3]{362880}$$

çıkar. $\sqrt[3]{362880} > 71$ olduğundan $S = a+b+c > 3 \cdot 71 = 213$ bulunur. a, b, c'nin birer tamsayı olduğu göz önüne alınırsa $S = a+b+c > 214$ olmalıdır. $S = 1 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 7$ örneği 214'ün mümkün olduğunu gösterir.

65. n bir doğal sayı, $f(n)$ de $[n^2, 2n^2]$ kapalı aralığındaki tam karelerin sayısı olsun. f nin azalmayan ve örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: p, $[n^2, 2n^2]$ aralığındaki karelerin $(n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+p-1)^2)$ sayısı olsun. Bu durumda $(n+p-1)^2 < 2n^2 < (n+p)^2$ eşitsizliği geçerlidir, ve $f(n) = p = \lfloor n(\sqrt{2}-1)+1 \rfloor$ elde edilir. Bu ifadeden f fonksiyonunun azalmadığı görülür. Fonksiyonun örten olduğunu göstermek için $q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ alalım. $f(n) = q$ önermesi

$$q = \lfloor n(\sqrt{2}-1)+1 \rfloor \Leftrightarrow (q-1)(\sqrt{2}-1) \leq n \leq q(\sqrt{2}-1)$$

önermesi ile aynıdır.

$$q(\sqrt{2}-1) - (q-1)(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 > 2$$

eşitsizliği, $n \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını garantiler.

66. n bir tam sayı olmak üzere,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

koşulunu sağlayan, doğal sayılardan gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu olsun. Eğer $f(1) = 1002$ ise $f(2004)$ ü bulunuz.

Çözüm:

$n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \cdots + f(n) &= n^2 f(n), \\ f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) &= (n-1)^2 f(n-1) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Taraf tarafa çıkarma yaptığımızda

$$f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) f(n-1)$$

elde ederiz. Buradan

$$f(n) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) f(n-1) = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot f(n-2) = \cdots = \frac{2f(1)}{n(n+1)}$$

olduğunu görürüz. $f(1) = 1002$ için $f(2004) = \dfrac{1}{2005}$ buluruz.

67. n pozitif tam sayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarını bulunuz.

Çözüm: Eşitlikler birbirinden çıkarılarak

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n - n - \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \cdots + (x_n^n - nx_n + n - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A.O. \geq G.O.$ eşitsizliği kullanılarak

$$x^m + m - 1 = x^m + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{(m-1)-\ adet} \geq m(x^m)^{1/m} = mx$$

bulunur ve eşitlik ancak ve ancak $x = 1$ durumunda mümkündür.

Dolayısıyla, parantez içerisindeki ifadeler negatif olmayan değerler alacağından, her birinin ayrı ayrı 0 olması gerekir. Buradan $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$ ve birinci denklem de kullanılarak $x_1 = 1$ bulunur.

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ denklemini sağlayan x,y ve z pozitif gerçel sayıları için $A = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$ nın alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,
$A^2 = (\dfrac{xy}{z})^2 + (\dfrac{yz}{x})^2 + (\dfrac{zx}{y})^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$
$= (\dfrac{xy}{z})^2 + (\dfrac{yz}{x})^2 + (\dfrac{zx}{y})^2 + 50$
$\geq (\dfrac{xy}{z})(\dfrac{zx}{y}) + (\dfrac{yz}{x})(\dfrac{xy}{z}) + (\dfrac{zx}{y})(\dfrac{yz}{x}) + 50$
$= (x^2 + y^2 + z^2) + 50 = 25 + 50 = 75$ bulunur.
Buradan, $A^2 \geq 75$ ve $A > 0$ olduğundan, $A \geq \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ bulunur.
$\dfrac{xy}{z} = \dfrac{yz}{x} = \dfrac{zx}{y}$ eşitliği sadece ve sadece $x = y = z$ olduğunda sağlanır. Bu durumda $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ olduğundan, $x = y = z = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Sonuç olarak, yukarıda verilen A ifadesinin en küçük değeri $5\sqrt{3}$ tür ve bu değere $x = y = z = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ için ulaşılır.

69. $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2$ eşitsizliğinin tüm x, y ve z pozitif gerçel sayıları için doğru olmasını sağlayacak en büyük M pozitif gerçel sayısını bulunuz.

Çözüm: Eşitsizlik $x = y = z$ için $6x^4 \geq M9x^4$ haline dönüşür.
Buradan, $M \leq \frac{2}{3}$ bulunur. Denklemde M yerine $\frac{2}{3}$ koyarsak,
$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq \frac{2}{3}(xy + yz + zx)^2$
buradan $3(x^4 + y^4 + z^4) + 3xyz(x + y + z) \geq (xy + yz + zx)^2$
elde ederiz. Böylece $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ olduğundan
$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3xyz(x + y + z) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4xyz(x + y + z)$
eşitsizliğin sağlandığını ispatlamamız M'nin $\frac{3}{2}$ değerini alabileceğini göstermek için yeterli olacaktır;
$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xyz(x + y + z) \geq 0$
$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 - (yz)(yx) - (yz)(zx) - (zx)(xy) \geq 0$
$\frac{1}{2}[(xy - yx)^2 + (yz - xz)^2 + (zx - xy)^2] \geq 0$
Tüm x, y ve z gerçel sayıları için, $(xy-yx)^2$, $(yz-xz)^2$ ve $(zx-xy)^2$ ifadeleri negatif olmayacağından yukarıdaki eşitsizlik her zaman doğrudur. Dolayısıyla soruda verilen eşitsizliği sağlayan tüm gerçel x, y ve z sayıları için sağlanması ancak M yerine en fazla $\frac{2}{3}$ yazıldığında mümkündür.

70. Toplamları 1 olan tüm a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $a + b + c = (a + b + c)^2 = 1$ olduğu için ispatlanması istenilen eşitsizliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a + b + c) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$$

veya

$$(\frac{a^2}{b} - 2a + b) + (\frac{b^2}{c} - 2b + c) + (\frac{c^2}{a} - 2c + a) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

buradan da

$$\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

elde edilir. $a, b, c \leq 1$ olduğu için eşitsizliğin sağlandığı açıkça görülmektedir.

71. x bir gerçel sayı ve $\overline{x}$ 'de x 'in tamsayı kısmı olsun.

$$3x^3 - \overline{x} = 3$$

eşitliğini sağlayan x gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: r eşitliği sağlayan bir gerçel sayı olsun. Bu durumda $3r^3 - \overline{r} = 3$ ve $\overline{r} \leq r < \overline{r} + 1$ olduğundan

$$(3r^3 - \overline{r}) - 1 = 2 < 3r^3 - r \leq 3r^3 - \overline{r} = 3$$

eşitsizliği elde edilir.
$f(x) = 3x^3 - x$ fonksiyonunun kökleri 0 ve $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ tür ve $f(x)$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ için, sıfırdan büyük değerler alır. $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ise $(3x+1)^2(3x-2) \leq 0 \iff f(x) = 3x^3 - x \leq \dfrac{2}{9} < 2$ dir.

$$max_{x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = \frac{2}{9} < 2$$

O halde $\frac{\sqrt{3}}{3} < r < 2$ olmalıdır. Yani $\overline{r} = 0$ ya da $\overline{r} = 1$ 'dir. $\overline{r} = 0$ ise $r = 1$, $\overline{r} = 1$ ise $r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ olur. Ancak sadece $r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ verilen eşiliği sağladığı için çözüm kümesi $\left\{\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right\}$ 'tür.

72. a, b, c gerçel sayılar, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ olmak üzere

$$f(x(x+1)) - f(x(x-1)) = x^7$$

dir. $p(n)$, n 'ye bağlı bir fonksiyon ve

$$1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 = \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24}$$

ise $p(n)$=?

Çözüm: $f(x(x+1)) - f(x(x-1)) = 8ax^7 + 8ax^5 + 6bx^5 + 2b^3 + 4cx^3 = x^7$ 'dir. Buradan

$$a = \frac{1}{8} \qquad b = \frac{-1}{6} \qquad c = \frac{1}{12}$$

bulunur. Yani $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
f(1(2)) - f(1(0)) &= 1^7 \\
f(2(3)) - f(2(1)) &= 2^7 \\
&\vdots \\
f((n-1)(n)) - f((n-1)(n-2) &= (n-1)^7 \\
f(n(n+1)) - f(n(n-1)) &= n^7
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
f(n(n+1)) - f(1(0)) &= 1^7 + 1^7 + \cdots + +n^7 \\
f(n^2+n) - f(0) &= 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 \\
\frac{1}{8}(n^4(n+1)^4 - \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 + \frac{1}{12}n^2(n+1)^2 &= \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24} \\
\frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2) &= \frac{n^2(n+1)^2 p(n)}{24} \\
3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2 &= p(n)
\end{aligned}$$

73. Bütün a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + bc} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + ca} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + ab} \leq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Soruda verilen eşitsizlik $\sum \frac{2a^2 + bc - 3bc}{2a^2 + bc} \leq 0$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan $3 - 3\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} \leq 0$ yani $\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} \geq 1$ eşitsizliği elde edilir. Bilindiği gibi $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}, z = \frac{2c^2}{ab}$ için

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{1 + \sqrt[3]{xyz}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak istenen

$$\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} = \sum \frac{b^2c^2}{2a^2bc + b^2c^2} \geq \frac{(\sum bc)^2}{2abc(a+b+c) + \sum b^2c^2} = 1$$

eşitsizliğini elde ederiz.

74. Aşağıda verilen eşitliklerin ortak gerçel çözümlerinin hepsini bulunuz:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2} = x$$

Çözüm: $f(x) = 4x^2/(1+4x^2)$ şeklinde tanımlayalım. f in değeri $[0,1)$ aralığında olduğundan x, y, z bu aralıkta olmalı. Eğer x, y, z den herhangi biri sıfır ise hepsi birden sıfır olur, o yüzden hiç birinin sıfır olmadığını varsayalım. $x, y, z > 0$ olduğundan $f(x)/x = 4x/(1+4x^2)$ en çok 1 dir, $x = 1/2$ değeri için de 1'e eşittir. O yüzden $y \leq x \leq z \leq y$ dir ve buradan üçü birbirine eşit olmak durumundadır, $x = y = z = 1/2$. Yani çözümler $(x, y, z) = \{(0,0,0), (1/2, 1/2, 1/2)\}$ olur.

75. a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ olsun. Bu durumda

$$S = f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \cdots + f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

değerini bulunuz.

Çözüm: Verilen toplamdaki terimleri aşağıdaki gibi gruplayalım.

$$\begin{aligned} S &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right)\right] \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2001}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1000}{2001}\right)\right] \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{a + a^x\sqrt{a} + a + a^{1-x}\sqrt{a}}{a + a^x\sqrt{a} + a^{1-x}\sqrt{a} + a} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan, $S = 1000$ elde edilir.

76. Toplamları 6, karelerinin toplamı 8, küplerinin toplamı ise 5 olan üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı nedir?

Çözüm: Bu sayılara a, b, c sayıları diyelim. Bu durumda

$$a+b+c=6$$
$$a^2+b^2+c^2=8$$
$$a^3+b^3+c^3=5$$

elde edilir. Öncelikle a, b ve c sayılarını kök olarak kabul eden, üçüncü dereceden ve en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan polinomu Vieta formülünü kullanarak bulalım. Polinomu x^3-Ax^2+Bx-C şeklinde düşünürsek,

$$\begin{aligned}A &= a+b+c\\ B &= ab+bc+ca\\ C &= abc\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu durumda, $B=ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=14$ olur. Yani bu polinom $x^3-6x^2+14x-C$ olarak yazılabilir. Şimdi a, b, c bu polinomun kökleri olduğuna göre,

$$\begin{aligned}a^3-6a^2+14a-C &= 0\\ b^3-6b^2+14b-C &= 0\\ c^3-6c^2+14b-C &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerin hepsini taraf tarafa toplarsak,

$$(a^3+b^3+c^3)-6(a^2+b^2+c^2)+14(a+b+c)-3C=0$$

buluruz. Buradan da $C=\dfrac{41}{3}$, ve polinom da $x^3-6x^2+14x-\dfrac{41}{3}$ olarak bulunur. Şimdi bu polinomu x ile çarparsak $x^4-6x^3+14x^2-\dfrac{41}{3}x$ polinomunu elde ederiz ki a, b ve c, elde ettiğimiz bu polinomun da kökleri olacağından,

$$\begin{aligned}a^4-6a^3+14a^2-\frac{41}{3}a &= 0\\ b^4-6b^3+14b^2-\frac{41}{3}b &= 0\\ c^4-6c^3+14b^2-\frac{41}{3}c &= 0\end{aligned}$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemleri taraf tarafa toplayarak ise,

$$(a^4+b^4+c^4)-6(a^3+b^3+c^3)+14(a^2+b^2+c^2)-\frac{41}{3}(a+b+c)=0$$

bulunur ki buradan da $a^4+b^4+c^4 = 6\times 5 - 14\times 8 + \dfrac{41}{3}\times 6 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla soruda değişik özellikleri verilen bu üç sayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı sıfırdır.

77. Hangi n pozitif tam sayıları için

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

eşitliği sağlanacak şeklide birbirinden farklı a_1,a_2,...,a_n tam sayılarını bulunabileceğini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

Genellik bozulmadan $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ kabul edebiliriz. $a_i > 0$ ve $a_i < a_{i+1}$ olduğundan $k \leq a_k$ ve $\dfrac{1}{a_k} \leq \dfrac{1}{k}$ olur. Dolayısıyla verilen denklemde a_k yerine k yazarsak denklemin sol tarafının değeri artar. Yeniden düzenlenme eşitsizliğinden [1] sol tarafın alabileceği en büyük değer $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n-1}+\cdots+\dfrac{n}{1}$ dir. Diğer taraftan, denklemin sağ tarafı da $\dfrac{1+2+\cdots+n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{4}$ 'dan büyük veya eşittir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}+\frac{2}{n-1}+\cdots+\frac{n}{1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n \\
&= 1+(n+1)\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\
&= (n+1)\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$n > 6$ için tümevarımla

$$\frac{n}{4} \geq \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} \ (*)$$

olduğunu görülür. Bu da verilen denklemin sağlanmadığını gösterir. Gerçekten de $n = 7$ için

$$\frac{7}{4}=1.75 \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}=1.71$$

[1] $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ ve $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ dizisi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizisinin bir permütasyonu olmak koşulu ile

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geq x_{\sigma(1)}y_1+x_{\sigma(2)}y_2+\cdots+x_{\sigma(n)}y_n \geq x_ny_1+x_{n-1}y_2+\cdots+x_1y_n$$

dir.

dir. $n > 7$ için (*) sağlanıyorsa, $\dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{n+2}$ olduğundan $n+1$ için de sağlanır.

Geriye $n = 2, 3, 4, 5, 6$ durumları kalıyor. $n = 2$ nin denklemi sağlamadığı açıktır. $n = 3$ için $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ sayıları (1) i sağlar. $n = 4$ ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4}\Big) \leq 2\Big(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{4}{1}\Big) < 13$$

Buradan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 12$ olur. Bu koşulu sağlayan
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$=$\{1, 2, 3, 4\}$,
$\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$ ve $\{1, 2, 3, 6\}$ değerleri (1) i sağlamazlar. Bu durumda $n \neq 4$.
$n = 5$ durumunda ise

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4} + \frac{4}{a5}\Big) \leq 2\Big(\frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1}\Big) = 17.4$$

yani, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 17$ olur. Buradan elde edilen $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$=$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ ve $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ değerleri (1) i sağlamaz. Bu durumda $n \neq 5$.
Son olarak $n = 6$ durumunda $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 \leq 22$ koşulunu sağlayan olası değerler $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ de (1) i sağlamadığı için $n \neq 6$.

Dolayısıyla denklemi sadece $n = 3$ sağlar.

78. $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığındaki a, b ve c gerçel sayıları için aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu ispatlayınız.

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b} \leq 3$$

Çözüm: Öncelikle soldaki eşitsizliği ispatlıyalım. $a, b \geq \frac{1}{2}$ olduğundan, $a + b \geq 1$ olur. Dolayısıyla,

$$\frac{a+b}{1+c} \geq \frac{a+b}{a+b+c}$$

elde edilir ki bu diğer ikililer için de geçerlidir. Bu üç eşitsizliği toplarsak,

$$2 = \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{a+b+c} \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{a+c}{1+b}$$

buluruz.

Şimdi de diğer eşitsizliği ispatlayalım. Soruda verilen ifadeyi aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\Big(\frac{a}{1+c} + \frac{c}{1+a}\Big) + \Big(\frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+b}\Big) + \Big(\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a}\Big)$$

Burada ilk ifadeye bakarsak, $a, c \leq 1$ olduğundan, $\dfrac{a}{1+c} \leq \dfrac{a}{a+c}$ ve $\dfrac{c}{1+a} \leq \dfrac{c}{c+a}$

elde edilir. Bu iki eşitsizliği toplarsak,

$$\frac{a}{1+c}+\frac{c}{1+a}\leq\frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}=1$$

elde ederiz ki bunu diğer iki ifadeye de uygulayıp hepsini toplarsak istenilen eşitsizliği elde etmiş oluruz.

79. Tüm a, b, c pozitif rasyonel sayıları için

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$ olsun. Bu durumda $xyz=1$ olur. Eşitsizlik şu şekilde yazılabilir: $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3(x+y+z)$. Aritmetik ortalama - geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$2x^2+\frac{1}{x}=x^2+x^2+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}}=3x$$

elde edilir. Aynı eşitsizlik y ve z için de yazılıp taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç elde edilir.

80. Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için aşağıdaki koşullar veriliyor:

(a) f sürekli artan bir fonksiyondur.

(b) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$, $\forall m,n\in\mathbf{N}$.

(c) $m\neq n$ ve $m^n=n^m$ ise $f(m)=n$ ya da $f(n)=m$ olur.

Bu durumda $f(30)$'un değerini hesaplayınız.

Çözüm: $f(30)=f(2\cdot3\cdot5)=f(2)\cdot f(3)\cdot f(5)$ olduğu için $f(2), f(3)$ ve $f(5)$ değerlerini bulmamız gerekir.
$m\neq n$ ise, $m^n=n^m$ eşitliğini sadece $(2,4)$ doğal sayı çifti sağlar. Bu yüzden (c) koşulundan $f(2)=4$ ya da $f(4)=2$ olacaktır. Ancak (b) koşulu göz önüne alındığında $f(4)=2$ olamaz. $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)\cdot f(2)=f(2)^2=2$ olur. $\sqrt{2}$ bir doğal sayı olmadığı için $f(4)\neq 2$. O halde $f(2)=4$ 'tür.
(a) koşulundan $4=f(2)<f(3)<f(4)=f(2)\cdot f(2)=16$ 'dır. Bu durumda $4<f(3)<16$ olur.
Öncelikle $5\leq f(3)\leq 8$ aralığına bakalım. Buradan $f(9)=f(3\cdot 3)=f(3)\cdot f(3)<64$ bulunur. Ancak $f(8)=f(4\cdot 2)=f(2\cdot 2)\cdot f(2)=f(2)^3=64$ olduğundan $f(8)>f(9)$ olur. Bu da (a) koşulu ile çelişir. Yani $f(3)$ incelenen aralıkta değildir.

$11 \leq f(3) \leq 15$ aralığını ele alalım. $f(27) = f(3^3) = f(3)^3 \geq 1331$ olur. Fakat $f(32) = f(2^5) = f(2)^5 = 1024$ olduğundan $f(32) < f(27)$ elde edilir. Bu da (a) koşulu ile çelişir.

Geriye $f(3) = 9$ ve $f(3) = 10$ durumları kalır. $f(3) = 10$ olsun. $f(243) = f(3^5) = f(3)^5 = 100000$ ve $f(256) = f(2^8) = f(2)^8 = 65536$ olduğundan $f(256) < f(243)$ olur. Bu durum da f fonksiyonunun sürekli artanlığı ile çelişir. O halde $f(3) = 9$ 'dur.

$f(5)$, $f(4) = 16 < f(5) < f(6) = f(2) \cdot f(3) = 36$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Eğer $17 \leq f(5) \leq 24$ olsa idi $289 \leq f(25) \leq 576$ olurdu. Fakat $f(24) = f(3) \cdot f(8) = 576$ olduğundan $f(5)$ bu aralıkta olamaz. $7 \leq f(5) \leq 35$ durumunda da $729 \leq f(25) \leq 1225$ ve $f(27) = f(3)^3 = 729$ olduğu için $f(27) \leq f(25)$, (a) koşulunu sağlamaz. O halde $f(5) = 25$ ya da $f(5) = 26$ 'dır. $f(5) = 26$ ise $f(125) = f(5^3) = f(5)^3 = 17576$ olur. Ancak $f(128) = f(2^7) = f(2)^7 = 16384$ 'tür. Bu durumda $f(5) \neq 26$ olduğundan $f(5) = 25$ olur.

O halde

$$\begin{aligned} f(30) &= f(2 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= f(2) \cdot f(3) \cdot f(5) \\ &= 4 \cdot 9 \cdot 25 \\ &= 900 \end{aligned}$$

81. Her $x, y \in \{1, 2, ..., 10\}$ için, $xf(x) + yf(y)$'nin bir böleni $x + y$ olacak şekilde, $\{1, 2, ..., 10\}$ kümesinden $\{1, 2, ..., 100\}$ kümesine tanımlı bütün artan f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x + y$ değeri, $xf(x) + yf(y)$ ve $xf(y) + yf(y)$'nin bir böleni olduğu için, çıkarma yaparak $x + y$'nin $x(f(y) - f(x))$'in de bir böleni olduğunu elde ederiz.

$y = x + 1$ için; $2x + 1$, $x(f(x + 1) - f(x))$'in bir böleni olur. $2x + 1$ ve x'in 1'den büyük ortak böleni olmadığı için, $2x + 1$'in $f(x + 1) - f(x)$'in bir böleni olduğunu anlarız.

Özel olarak, her $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ için f artan olduğundan $f(x+1)-f(x) \geq 2x+1$'dir. Bu yüzden

$$\sum_{x=1}^{9}(f(x + 1) - f(x)) \geq \sum_{x=1}^{9}(2x + 1).$$

yazarız. Bu, $f(10) \geq f(1)+99 \geq 100$ olduğu anlamına gelir. Bu yüzden, $f(10) = 100$ ve $f(1) = 1$ olmak zorundadır.

Her $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ için $f(x + 1) - f(x) = 2x + 1$ olmasından dolayı, $f(x) = x^2$ sonucuna varırız.

82. $(1+\sqrt{2})^{3000}$ sayısının ondalık gösteriminde virgülden sonraki 1000'inci basamak kaçtır?

Çözüm:$a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ olsun. a_n de $(1+\sqrt{2})^n$ ve $(1-\sqrt{2})^n$ in binom açılımları yapıldığında $(1+\sqrt{2})^n$ açılımından gelen üssü tek sayı olan terimler ile $(1-\sqrt{2})^n$ nin açılımından gelen üssü tek sayı olan terimlerin toplamı sıfır olacaktır. Geriye yalnız her iki açılımdan da üssü çift olan terimler kalacaktır. Fakat çift üsler için $\sqrt{2}$ her zaman tamsayı olacağından a_n de her zaman bir tamsayı olacaktır.

$\left|1-\sqrt{2}\right| < 1$ olduğu için n sonsuza yaklaştıkça, $(1-\sqrt{2})^n$ de sıfıra yaklaşacaktır. $|(1-\sqrt{2})^3| < \dfrac{1}{10}$ ve $(1-\sqrt{2})^{3000} < 10^{-1000}$ olur.

O halde, her $n \in \mathbb{R}$ için $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ bir tamsayı olduğundan, a_{3000} de bir tamsayı olacaktır. $(1-\sqrt{2})^{3000}$'ın virgülden sonraki en az 1000 basamağı 0 olduğu için $(1+\sqrt{2})^{3000}$ in virgülden sonraki en az 1000 basamağı 9 olmalıdır. Dolayısıyla virgülden sonraki 1000'inci basamağı da 9 dur.

83. a, b, c pozitif gerçel sayıları $abc = 2$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu durumda

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

ve

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizliği birleştirirsek

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{3} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)((b+c)+(a+c)+(a+b))}{6} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^2}{6} \qquad (*) \end{aligned}$$

Aritmetik Ortalama-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b} &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(a+c)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

Yani $a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\geq 6$ 'dır. $(*)$ eşitsizliği kullanılarak

$$a^3+b^3+c^3\geq \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^2}{6}\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

elde edilir.

84. Her x gerçel sayısı için

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right]$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lfloor x\rfloor$ ile x'i aşmayan en büyük tam sayıyı gösterelim.
Birinci Çözüm: $\dfrac{x+1}{6}=y$ diyelim. Denklemde yerine yazarsak:

$$\left\lfloor y+\frac{1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor y+\frac{1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor y+\frac{2}{3}\right\rfloor=\lfloor 3y\rfloor-\lfloor 2y\rfloor .$$

Hermite eşitlikleri yardımıyla,

$$\lfloor 2y\rfloor=\lfloor y\rfloor+\left\lfloor y+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$\lfloor 3y\rfloor=\lfloor y\rfloor+\left\lfloor y+\frac{1}{3}\right\rfloor+\left\lfloor y+\frac{2}{3}\right\rfloor$$

bulunur.

İkinci Çözüm: $k\in Z$ ve $y\in[0,6)$ olmak üzere $x=6k+y$ şeklinde ifade edersek eşitlik

$$\left\lfloor\frac{y+3}{6}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y+4}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{y+5}{6}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{y+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y+1}{3}\right\rfloor$$

şeklini alır.

$y\in[0,1)\,,y\in[1,2)\,,y\in[2,3)\,,y\in[3,4)\,,y\in[4,5)\,,y\in[5,6)$ durumları kontrol edilerek sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

85.

$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

denkleminin köklerinin gerçel olmasını sağlayan a gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: x sayısı, $0,-1,-2,-3,-4$ ya da -5 olamaz. $\dfrac{1}{y(y+1)}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)} \\
&= a^2(\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)) \\
&= a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
a^2\left(\frac{5}{x(x+5)}\right)-1 &= 0 \\
\frac{5a^2-(x^2+5x)}{x^2+5x} &= 0 \\
x^2+5x-5a^2 &= 0
\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin kökleri de

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+20a^2}}{2}$$

dir. Ancak x sayısı 0,-1,-2,-3,-4 ya da -5 olamayacağından

$$\begin{aligned}
-5\pm\sqrt{25+20a^2} &\neq 0,-2,-4,-6,-8,-10 \\
\sqrt{25+20a^2} &\neq 5,3,1 \\
25+20a^2 &\neq 25,9,1 \\
20a^2 &\neq 0 \\
a &\neq 0
\end{aligned}$$

O halde verilen denklemin sıfırdan farklı bütün a gerçel sayıları için gerçel kökleri vardır.

86. $n\geq 3$ için

$$\begin{aligned}
x_1^2-x_2x_3\cdots x_n &= 0 \\
x_2^2-x_1x_3\cdots x_n &= 0 \\
x_3^2-x_1x_2\cdots x_n &= 0 \\
&\vdots \\
x_n^2-x_1x_2x_3\cdots x_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemleri taraf tarafa çarpalım

$$(x_1x_2x_3\cdots x_n)^2=(x_1x_2x_3\cdots x_n)^{n-1}$$

Eğer $x_1x_2x_3\cdots x_n=0$ ise $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ sayılarından en az bir tanesi 0 olmak zorundadır. Bu da diğer bütün sayıların 0 olmasını gerektirir.
$x_1x_2x_3\cdots x_n=a\neq 0$ ise a 'nın karesi ve $n\geq 3$ için $n-1$ 'inci kuvveti aynı olduğu için n çift ise $a=1$, n tek ise $a=\pm1$ olur. n çift ise $x_1x_2x_3\cdots x_n=1$ eşitliğinden

$$x_i^2=\frac{x_1x_2x_3\cdots x_n}{x_i}=\frac{1}{x_i}\qquad \Rightarrow x_i^3=1\quad x_i=1, i=1,2,3,\cdots n$$

olur. n tek ise

$$x_i^2=\frac{x_1x_2x_3\cdots x_n}{x_i}=\frac{\pm1}{x_i}\qquad \Rightarrow x_i^3=\pm1\quad x_i=\pm1, i=1,2,3,\cdots n$$

bulunur.
Ayrıca $n=3$ durumunu inceleyelim. $n=3$ ise verilen sistem

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2x_3\\ x_2^2 &= x_1x_3\\ x_3^2 &= x_1x_2\end{aligned}$$

haline gelir. $x_1x_2x_3=c$ ise

$$x_i^2=\frac{x_1x_2x_3}{x_i}=\frac{c}{x_i}\qquad \Rightarrow x_i^3=c^3\quad x_i=c, i=1,2,3$$

elde edilir. O halde $n=3$ için bütün c gerçel sayıları bir çözümdür.

87. Her $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ için

(a) $f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=3^x$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı gerçel sayılarda tanımlı bütün fonksiyonları bulunuz.

(b) $f(x)=\frac{2^{\frac{1+x}{x}}-2^x}{3}$ fonksiyonu için $(x\neq 0)$

$$f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2}{2002}\right)+\cdots+f\left(\frac{2002}{2002}\right)+2f\left(\frac{2002}{2001}\right)+2f\left(\frac{2002}{2000}\right)+\cdots+2f\left(\frac{2002}{1}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm:

(a) $f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=3^x$ eşitliğinde x yerine $\frac{1}{x}$ yazarsak $f\left(\frac{1}{x}\right)-3f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ elde edilir. Bu eşitliği 3 'le çarpıp verilen eşitlikle toplarsak

$$\begin{aligned} 3f\left(\frac{1}{x}\right) - 9f(x) + f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) &= 3\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x \\ -8f(x) &= 3\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x \\ f(x) &= \frac{-1}{8}(3\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3^x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1+x}{x}} - 2^x}{3}$ ise

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2^{\frac{1+x}{x}} - 2^x + 2(2^{1+x} - 2^{\frac{1}{x}})}{3} = 2^x$$

bulunur. Verilen toplam düzenlenirse

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2002}\right) + 2f\left(\frac{2002}{1}\right) + f\left(\frac{2}{2002}\right) + 2f\left(\frac{2002}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{2002}{2002}\right) \\ = \;& 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}} + f(1) \\ = \;& 1 - 1 + 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}} + \frac{2}{3} \\ = \;& (1 + 2^{\frac{1}{2002}} + 2^{\frac{2}{2002}} + \cdots + 2^{\frac{2001}{2002}}) + \frac{2}{3} - 1 \\ = \;& \frac{2^{\frac{2002}{2002}} - 1}{2^{\frac{1}{2002}} - 1} - \frac{1}{3} \\ = \;& \frac{1}{2^{\frac{1}{2002}} - 1} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

88. (x,y) ile x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenin,, $[x,y]$ x ile ise y sayılarının en küçük ortak katını gösterelim. Bu durumda

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{[x,y]} + \frac{1}{(x,y)} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan bütün $\{x,y\}$ ikililerini bulunuz.

Çözüm: $d = (x,y)$ ise $x = du$ ve $y = dv$ olsun. Bu durumda $(u,v) = 1$ olur ve buradan da $2(u+1)(v+1) = duv$ denklemini elde ederiz. Burada $(v, v+1) = 1$ olduğu için $v|2(u+1)$ olduğu görülür.

Birinci Durum $(u = v = 1)$**:** Bu durumda $d = 8$ olduğundan tek çözüm $x = 8$ ve $y = 8$ ikilisidir.

İkinci Durum $(u < v)$**:** Bu durumda $u + 1 \le v \Leftrightarrow 2(u+1) \le 2v \Leftrightarrow \dfrac{2(u+1)}{v} \le 2$, yani $\dfrac{2(u+1)}{v} \in \{1,2\}$ olur.

Ancak $\dfrac{2(u+1)}{v} = \dfrac{du}{v+1}$ olduğu için $\dfrac{2(u+1)}{v} = 1$ durumunda $(d-2)u = 3$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla ya $\{d,u\} = \{3,3\}$ ya da $\{d,u\} = \{5,1\}$ olabilir ve bu durumlarda da ya $\{d,u,v\} = \{3,3,8\}$ ya da $\{d,u,v\} = \{5,1,4\}$ olabilir. Sonuç olarak $\{x,y\} = \{9,24\}$ ya da $\{x,y\} = \{5,20\}$ olabilir.

$\dfrac{2(u+1)}{v} = 2$ durumunda ise $(d-2)u = 4$ olacağından, benzer şekilde $\{x,y\} = \{12,15\}$ ya da $\{x,y\} = \{8,12\}$ ya da $\{x,y\} = \{6,12\}$ olabilir.

Üçüncü Durum $(u > v)$**:** u,v ve x,y simetrik olduklarından çözümler de ikinci durum çözümlerine göre simetrik olur. Sonuç olarak bütün ikililer:

$$\{8,8\}, \{9,24\}, \{24,9\}, \{5,20\}, \{20,5\}, \{12,15\}, \{15,12\}, \{8,12\}, \{12,8\}, \{6,12\}, \{12,6\},$$

olarak bulunur.

89. a, b, c gerçel sayılardır. M sayısı $y = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki en büyük değeri olsun. $M \geq 1$ olduğunu gösteriniz ve eşitlik durumunun gerçekleştiği bütün durumları belirleyiniz.

Çözüm:

Birinci Çözüm:$|x| \leq 1$ koşulunu sağlayan x gerçel sayıları için $y = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ ifadesinin en büyük değeri M ise $M < 1$ olamayacağını göstereceğiz.

$M < 1$ ise;

$-1 < 4x^3 + ax^2 + bx + c < 1$ dir (Her $-1 \leq x \leq 1$ için).

$x = -1$ seçersek; $3 < a - b + c < 5$, $\;3 + b < a + c < 5 + b$ olur.

$x = 1$ seçersek; $-5 < a + b + c < -3$, $\;-5 - b < a + c < -3 - b$ olur.

$3 + b < a + c < -3 - b$ ve $3 + b < -3 - b$, $\;b < -3$ bulunur.

$x = -\dfrac{1}{2}$ seçersek; $-1 < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c < 1$, $\;-\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{2} < \dfrac{9}{4} + c < \dfrac{3}{2} + \dfrac{b}{2}$ olur.

$x = \dfrac{1}{2}$ seçersek; $-1 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c < 1$, $\;-\dfrac{3}{2} - \dfrac{b}{2} < \dfrac{9}{4} + c < \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{2}$ olur.

$\dfrac{-3-b}{2} < \dfrac{a}{4} + c < \dfrac{3+b}{2}$ ve $-3 - b < 3 + b$, $\;b > -3$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak her a, b, c gerçel sayı üçlüsü için $M \geq 1$ dir. Şimdi ise $M = 1$ olmasını sağlayan tüm a, b, c üçlülerini bulalım.

$M = 1$ ise $-1 \leq 4x^3 + ax^2 + bx + c \leq 1$ olmalıdır (Her $-1 \leq x \leq 1$ için).

Yine $x = -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1$ seçersek; $3 + b \leq a + c \leq -3 - b$ ve $\dfrac{-3-b}{2} \leq \dfrac{a}{4} + c \leq \dfrac{3+b}{2}$ buluruz. $-3 - b \leq 3 + b \leq -3 - b$, $\;-3 \leq b \leq -3$ ve buradan $b = -3$ olur. $0 \leq a + c \leq 0$, $\;0 \leq \dfrac{a}{4} + c \leq 0$ olur ve $a + c = \dfrac{a}{4} + c = 0$ bulunur. Buradan da $a = 0 = c$ olur.

Gerçekten $a = 0 = c$, $b = -3$ için $M = 1$ dir. Çünkü $M > 1$ ise; $[-1, 1]$ aralığında $|4x_0^3 - 3x_0| > 1$ olacak şekilde bir x_0 bulunur. $4x_0^3 - 3x_0 > 1 \iff (x_0 - 1)(4x_0^2 + 4x_0 + 1) > 0 \iff (x_0 - 1)(2x_0 + 1)^2 > 0$, ancak $x_0 \leq 1$ ve $(2x_0 + 1)^2 \geq 0$ olduğundan $4x_0^3 - 3x_0 \leq 1$ dir. $4x_0^3 - 3x_0 < -1 \iff (x_0 + 1)(4x_0^2 - 4x_0 + 1) < 0 \iff (x_0 + 1)(2x_0 - 1)^2 > 0$, ancak $x_0 \geq 1$ ve $(2x_0 - 1)^2 \geq 0$ olduğundan $4x_0^3 - 3x_0 \geq -1$ dir. Yani $|4x_0^3 - 3x_0| > 1$ olamaz. $M = 1$ olmasını sağlayan tek a, b, c üçlüsü $(a, b, c) = (0, -3, 0)$ dır.

İkinci Çözüm: $a = 0, b = -3, c = 0$ için -1, -1/2, -1/2, 1 noktalarında fonksiyon maksimum olur ve $M = 1$ dir. $M < 1$ koşulunu sağlayan a, b, c sayılarının var olduklarını kabul edelim. O zaman,

$$(4x^3 + ax^2 + bx + c) - (4x^3 - 3x)$$

-1 de pozitif, -1/2 de negatif, 1/2 de pozitif, 1 de negatif olmalıdır ki bu ikinci dereceden bir fonksiyon için mümkün değildir. Bu nedenle $M \geq 1$ dir ve aynı nedenle eşitlik sadece $(a, b, c) = (0, -3, 0)$ da gerçekleşir.(Not: Bu Chebyshev polinomlarının minimum sapma özelliğinin özel bir halidir.)

90. Pozitif tam sayılar üzerinde tanımlı f fonksiyonu $f(1) = 1996$ ve

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n) \qquad (n > 1)$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1996)$ değerini bulunuz.

Çözüm: Tümevarım kullanılarak

$$f(n) = \frac{2 \cdot 1996}{n(n+1)}$$

olduğu gösterilebilir. Bir başka deyişle $n = 1$ için açıkça sağlanan bu ifadenin $(n-1)$ için doğru olduğunu kabul edersek,

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{n^2 - 1}\left(\frac{3992}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{3992}{(n-1)n}\right) \\
&= \frac{3992}{n^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{3992}{(n+1)(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{3992}{(n+1)(n-1)} \frac{n-1}{n} = \frac{3992}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$f(1996) = \frac{3992}{1996 \cdot 1997} = \frac{2}{1997}$$

dir.

91. x bir gerçel sayı, n bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı olsun. Bu durumda $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \ldots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İspatlamamız gereken eşitliğe, gereksiz tekrarlardan kaçınmak için E diyelim.

$$E = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$n = 1$ durumu için sonuç aşikardır. $n > 1$ durumu için x gerçel sayısını n sayı tabanında düşünelim.

$$x = \lfloor x \rfloor + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots$$

burada $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, n tabanındaki ondalıklı ifadeleri temsil ettiğinden, 0 ve $n-1$ arasındaki tamsayılardır.

Ayrıca ondalık kısımda tekrarlayan $(n-1)$ değerleri yerine sonu sıfırlı olarak yazarsak (başka bir deyişle limit değerini yazarsak), her bir gerçel sayı için tek bir gösterim şekli elde etmiş oluruz. (Örneğin, ondalıklı -2.3 gerçel sayısının gösterimi için $-3 + 0.6999\ldots$ değil de $-3 + 0.7000\ldots$ gösterimini kullanalım.)

E eşitliğinin sağ tarafını ele alırsak: $nx = (n \lfloor x \rfloor + d_1) + 0.d_2 d_3 \ldots$
Dolayısıyla, $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor + d_1$ eşitliğini elde ederiz.

Şimdi, E eşitliğinin sol tarafını düşünecek olursak:
s, $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesinin elemanlarından biri olmak üzere, toplamın elemanlarından her biri $\left\lfloor x + \frac{s}{n} \right\rfloor$ olarak gösterilebilir. Bu durumda tekrar n tabanında düşünürsek,

$$x + \frac{s}{n} = \lfloor x \rfloor + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots + 0.s = a + 0.r d_2 d_3 \ldots$$

olur. Burada a, r değerine göre 2 farklı değer alabilir.

$$\begin{aligned} d_1 \leq\ & r \leq n-1 \quad \text{ise} \quad a = \lfloor x \rfloor \\ 0 \leq\ & r \leq d_1 - 1 \quad \text{ise} \quad a = \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Sonuç olarak E eşitliğinin sol tarafındaki toplamın son d_1 tanesinde $\lfloor x \rfloor + 1$, geri kalanlarda ise $\lfloor x \rfloor$ geleceğinden eşitliğin sol tarafında da $n \lfloor x \rfloor + d_1$ elde ederiz. Böylece

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

eşitliğini ispatlamış olduk.

92.

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliği sağlayan bütün pozitif a, b, c gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: Chebyshev eşitsizliğini (açıklama 1 e bakınız) kullanarak

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$ olduğundan $(a + b + c) \leq 1$ bulunur. Diğer taraftan

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

(açıklama 2 ye bakınız) eşitsizliğinden dolayı $(ab + bc + ca) \geq \frac{1}{3}$ olduğu görülür.

$$1 \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \geq 3(ab + ac + bc) \geq 1$$

olduğundan $(a+b+c) = 1$ bulunur. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ eşitlik durumu ancak $a = b = c$ olduğunda sağlandığından $a = b = c = \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

Açıklama 1: $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ ve $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ ise $3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$ olur. Bizim durumumuzda genelliği bozmadan, $a \geq b \geq c$ olsun. Bu durum $a^2 \geq \ b^2 \geq c^2$ olmasını gerektirir $(a, b, c > 0)$.
Açıklama 2: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

93. a, b ve c rasyonel sayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin her birinin sadece $a = b = c = 0$ durumunda sağlanabileceğini gösteriniz.

(i) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0$

(ii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$

(iii) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$

Çözüm: İlk olarak, a, b ve c 'nin tam sayılar olduğunu varsayalım. Bunun için, paydalarının en küçük ortak katlarıyla, her bir denklemi çarpabiliriz.
a, b ve c nin hepsinin birlikte sıfır olmadığı değerleri için her bir denklemin sağlandığını varsayalım ve bir çelişki elde edelim. Bunun için, aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç duyacağız.

Yardımcı Teorem:

$n > 1$ ve m pozitif tam sayılar olsunlar. O halde, $\sqrt[n]{m}$ ya bir tam sayıdır ya da irrasyonel bir sayıdır.

İspat:

r ve s tam sayıları aralarında asal olmak üzere, $\sqrt[n]{m} = r/s$ 'in rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım.
O halde, $r^n = ms^n$ 'dir.
Aritmetiğn temel teoreminden, denklemin her iki tarafı da aynı asal çarpanlara sahip olmak zorundadır.
r^n ve s^n 'in asal çarpanlarında, her bir asal n'nin bir tamsayı katı kez bulunur.
Bu yüzden, m 'nin asal çarpanlarındaki her bir asal n'nin bir tamsayı katı kez bulunmak zorundadır.
Bu, m 'nin n-inci kuvvet olması ($x^n = m$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}$ vardır) anlamına gelir ve dolayısıyla $\sqrt[n]{m}$ bir tam sayıdır.
Sonuç olarak, $\sqrt[n]{m}$ ya rasyoneldir (bu durumda bir tam sayıdır) ya da irrasyoneldir.

(i) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt{2} = 0}$

İlk olarak, $b = c = 0$ ise, $a = 0$ 'dır.
$c = 0$ ve $b \neq 0$ ise, $\sqrt[3]{2} = -a/b$ 'dir ve yukarıdaki yardımcı teoremle çelişir. ($1^3 < 2 < 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2}$ bir tam sayı değildir. Bu yüzden, irrasyonel olmak zorundadır.)
$c \neq 0$ ise, denklemi $-b\sqrt[3]{2} = a + c\sqrt{2} = 0$ şeklinde yazıp, her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -2b^3 &= a^3 + 3a^2c\sqrt{2} + 3ac^2(\sqrt{2})^2 + c^3(\sqrt{2})^3 \\ &= a^3 + 6ac^2 + (3a^2c + 2c^3)\sqrt{2} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Bu yüzden, $\sqrt{2} = -(2b^3 + a^3 + 6ac^2)/(3a^2c + 2c^3)$ 'dir. (paydanın sıfırdan farklı olması gerekliliğine dikkat etmeliyiz.)
Bu durum, yine yardımcı teoremle çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

(ii) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0}$

$a = 0$ ise, $b = c = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{3/2}$ rasyoneldir ve bu yüzden $\sqrt[3]{3/2}$ rasyoneldir. Bu durum yukarıdaki yardımcı teoremle çelişir.
$b = 0$ ise, $a = c = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{3} = -a/c$ rasyoneldir.
$c = 0$ ise, $a = b = 0$ 'dır. Aksi taktirde, $\sqrt[3]{2} = -a/b$ rasyoneldir.
Şimdi, a, b ve c 'nin sıfırdan farklı olduklarını varsayalım ve denklemi $-a = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} = 0$ şeklinde yazalım. $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ özdeşliğinden faydalanarak,

her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -a^3 &= 2b^3 + 3c^3 + 3bc\sqrt[3]{6}(b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3}) \\ &= 2b^3 + 3c^3 - 3abc\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Buradan, $\sqrt[3]{6} = (a^3 + 2b^3 + 3c^3)/3abc$ olur. Bu durum da, yardımcı teoremle çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

(iii) $\mathbf{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0}$

Yukarıda olduğu gibi, a, b ve c 'den herhangi biri sıfıra eşit olduğunda diğerleride sıfır olmak zorundadır. Şimdi, a,b ve c 'nin sıfırdan farklı olduklarını varsayalım ve denklemi $-a = b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ şeklinde yazalım. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ özdeşliğinden faydalanarak, her iki tarafın kübünü alırsak,

$$\begin{aligned} -a^3 &= 2b^3 + 4c^3 + 6bc(b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \\ &= 2b^3 + 4c^3 - 6abc \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc = 0 \qquad (1)$$

olur. Şimdi a, b ve c 'nin en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu varsayalım. (değilse, a, b ve c 'yi en büyük ortak bölenlerine bölebiliriz.)
(1)'den, a çift olmak zorundadır. $a = 2a_1$ olsun.
O halde, $8a_1^3 + 2b^3 + 4c^3 - 12a_1bc = 0$ 'dır. Buradan, $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 - 6a_1bc = 0$ denklemini elde ederiz.
Bu yüzden b çifttir. $b = 2b_1$ olsun.
O halde, $4a_1^3 + 8b_1^3 + 2c^3 - 12a_1b_1c = 0$ 'dır. Buradan, $2a_1^3 + 4b_1^3 + c^3 - 6a_1b_1c = 0$ denklemini elde ederiz.
Yukarıdaki denklemden, c 'de çift olmak zorundadır. Dolayısıyla, a, b ve c ' nin hepsi çifttir. Bu durum, a, b ve c ' nin en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu kabul etmemizle, çelişir.
Bu yüzden, tek çözüm $a = b = c = 0$ 'dır.

94. x, y, z, m, n sayıları $m + n \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif gerçel sayılardır. Bu durumda

$$\begin{gathered} x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} + y\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} + \\ z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} \leq \frac{3(m+n)}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \end{gathered}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} &= \sqrt{(xz+myz)(xy+nyz)} \le \frac{xy+xz+(m+n)yz}{2}\\
\sqrt{xz(y+mx)(y+nz)} &= \sqrt{(yz+mxz)(xy+nxz)} \le \frac{xy+yz+(m+n)xz}{2}\\
\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} &= \sqrt{(yz+mxy)(xz+nxy)} \le \frac{xz+yz+(m+n)xy}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$x\left[xy+xz+(m+n)yz\right]+y\left[xy+yz+(m+n)xz\right]+z\left[xz+yz+(m+n)xy\right]$$

$$\le \frac{3(m+n)}{4}(x+y)(y+z)(z+x)$$

eşitsizliğini, ya da $A=x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2$ ve $B=xyz$ olmak üzere

$$4\left[A+3(m+n)B\right]\le 3(m+n)(A+2B) \Leftrightarrow 6(m+n)B \le \left[3(m+n)-4\right]A$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

Burada $m+n\ge 2$ olduğu için $m+n\le 3(m+n)-4$ eşitsizliği elde edilir. Ayrıca aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $6B\le A$ olduğu görülür. Dolayısıyla son iki eşitsizlikten

$$6(m+n)B\le\left[3(m+n)-4\right]A$$

eşitsizliği elde edilir ve bu şekilde istenen eşitsizlik gösterilmiş olur.

95. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{n}{a_n}, n\ge 1$$

şeklinde tanımlanıyor. $n\ge 4$ için $\lfloor a_n^2\rfloor = n$ olduğunu ispatlayınız.($\lfloor x\rfloor$ sayısı x'i aşmayan en büyük tam sayıdır.)

Çözüm:
Tümevarım ile $n\ge 4$ için $\dfrac{n-1}{\sqrt{n+1}} < a_n < \sqrt{n+1}$ olduğunu göstereceğiz. $a_1 = 1, a_2=2, a_3=2$ ve $a_4=\frac{13}{6}$ dır. $n=4$ için $\dfrac{3}{\sqrt{2}} < \dfrac{13}{6} < \sqrt{5}$ sağlanır. $n=k$ için $\dfrac{k-1}{\sqrt{k-2}} << a_k < k+1$ sağlandığını kabul edelim. $n=k+1$ için sağlandığını gösterelim. $f(x)\dfrac{x}{k}+\dfrac{k}{x}$ olsun. $0<p,q\le\sqrt{k+1}$ koşulunu sağlayan her p,q gerçel sayı

ikilisi için $f(p) > f(q)$ olduğunu gösterelim. $f(p) - f(q) = \left(\frac{p}{k} + \frac{k}{p}\right) - \left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q}\right) = \frac{p-q}{k} - \frac{k(p-q)}{pq} = \frac{(p-q)(pq-k^2)}{kpq}$ ve $pq < k+1 < k^2$ $(k \geq 4)$ olduğundan $f(p) > f(q)$ olur. Buna göre;

$a_{k+1} = f(a_k) < f\left(\frac{k-1}{\sqrt{k-2}}\right) = \frac{k-1}{k\sqrt{k-2}} + \frac{k\sqrt{k-2}}{k-1} < \sqrt{k+2}$

$\Longleftrightarrow \frac{(k^2-2k+1)+k^2(k-2)}{k(k-1)\sqrt{k-2}} < \sqrt{k+2}$

$\Longleftrightarrow k + \frac{1-2k}{k^2-k} < \sqrt{k^2-4}$

$\Longleftrightarrow k^2 + \frac{(2k-1)^2}{(k^2-k)^2} + \frac{2(1-2k)}{k-1} < k^2 - 4$

$\Longleftrightarrow \frac{(2k-1)^2}{(k^2-k)^2} < \frac{2}{k-1}$

$\Longleftrightarrow (2k-1)^2 < 2k^2(k-1)$

$\Longleftrightarrow 2k^2 > 6k^2 - 4k + 1$ ve $k \geq 4$ olduğundan $2k^3 - 6k^2 \geq 2k^2 < -4k+1$ olur. Yani $a_{k+1} < \sqrt{k+2}$ dir.

$a_{k+1} = f(a_k) > f(\sqrt{k+1}) = \frac{\sqrt{k+1}}{k} + \frac{k}{\sqrt{k+1}} > \frac{k}{\sqrt{k-1}}$

$\Longleftrightarrow 1 + \frac{k+1}{k^2} > \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

$\Longleftrightarrow 1 + \frac{(k+1)^2}{k^4} + \frac{2(k+1)}{k^2} > 1 + \frac{2}{k-1}$

$\Longleftrightarrow \frac{(k+1)^2}{k^4} > \frac{2}{k^2(k-1)}$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 > \frac{2}{k-1}$ ve $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 > 1 > \frac{2}{k-1}$ olduğundan $a_{k+1} > \frac{k}{\sqrt{k-1}}$ olur ve tümevarım biter. Böylece $n \geq 4$ için $\sqrt{n} < \frac{n-1}{\sqrt{n-2}} < a_n < \sqrt{n+1}$ ve $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$ bulunur.

96. Aşağıdaki denklem sistemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

$$x + y + z = 2,$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1,$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6.$$

Çözüm: İkinci denklemi düzenlersek:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx = 1,$$

$$(x+y+z)^2 + xy + yz + zx = 1,$$

birinci denklemden dolayı $x + y + z = 2$ yazarsak,

$$xy + yz + zx = -3.$$

Benzer şekilde üçüncü denklemi düzenlersek:

$$x(xy + xz) + y(yz + xy) + z(xz + yz) = -6,$$

$$x(3 + yz) + y(3 + xz) + z(3 + xy) = 6,$$

$$3(x + y + z) + 3xyz = 6,$$

$$x + y + z + xyz = 2,$$

$$xyz = 0.$$

Dolayısıyla verilen denklem sistemi aşağıdaki yeni denklem sistemine dönüşmüş olur:

$$x + y + z = 2,$$

$$xy + yz + zx = -3,$$

$$xyz = 0.$$

Vieta formülünden dolayı x, y, z gerçel sayıları $t^3 - 2t^2 - 3t = 0$ polinomunun kökleridir. Polinomun kökleri $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 3$ dir. Bu durumda denklem sisteminin çözümleri polinom köklerinden bulunur.

$$(x, y, z) \in \{(0, 3, -1), (0, -1, 3), (3, 0, -1), (-1, 0, 3), (3, -1, 0), (-1, 3, 0)\}.$$

97. x bir gerçel sayı olmak üzere, $\sin(\cos x)$ ve $\cos(\sin x)$ fonksiyonlarının hangisi daha büyüktür?

Çözüm: Bu soruyu çözmek için, aşağıdaki trigonometrik özdeşliklerden yararlanacağız.

$$\begin{aligned}
\sin A &= \cos(\frac{\pi}{2} - A) && (1)\\
\cos A - \cos B &= -2\sin(\frac{A+B}{2}).\sin(\frac{A-B}{2}) && (2)\\
\cos(x + \frac{\pi}{4}) &= \cos x.\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin x.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) && (3)\\
\cos(x - \frac{\pi}{4}) &= \cos x.\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin x.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) && (4)
\end{aligned}$$

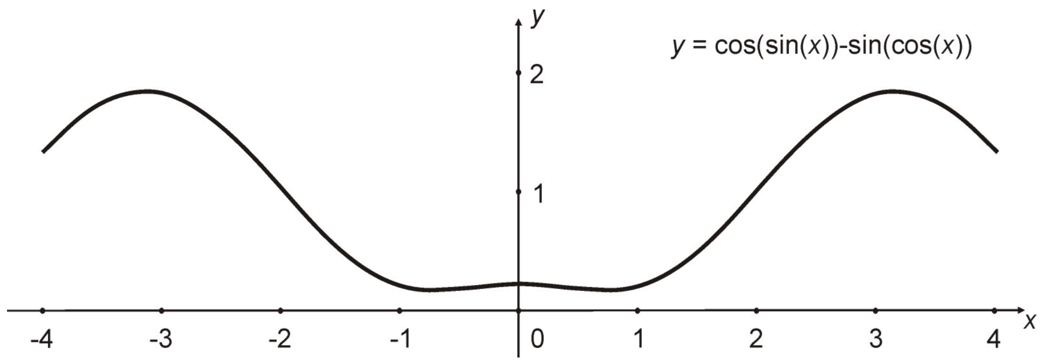
Yukarıdaki özdeşlikleri kullanarak;

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) - \sin(\cos x) &\overset{(1)}{=} \cos(\sin x) - \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) \\
&\overset{(2)}{=} -2\sin[\frac{1}{2}(\sin x - \cos x + \frac{\pi}{2})]\sin[\frac{1}{2}(\sin x + \cos x - \frac{\pi}{2})] \\
&\overset{(3),(4)}{=} -2\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan dolayı, bütün x değerleri için $0 < -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ olur. Bu yüzden, bütün x değerleri için $\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}) > 0$ 'dır. Benzer şekilde, bütün x değerleri için $-\frac{\pi}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} < 0$ elde edilir. Bu yüzden, bütün x değerleri için $\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) < 0$ 'dır. Buradan, $-2\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) > 0$ sonucuna varırız.

Dolayısıyla, bütün gerçel x değerleri için $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ olur.

Not: $y = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ grafiğinin bir taslağı aşağıda çizilmiştir. Grafik 2π periyoda sahiptir.



98. a gerçel sayısı $(0,1)$ aralığında ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$$

ise $f\left(\frac{1}{7}\right) = ?$

Çözüm:

Birinci Çözüm:

$$g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} = Af(Bx+C)+D$$

olsun. $g(0) = 0$ ve $g(1) = 1$ olur.

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= Af\left(B\frac{x+y}{2}+C\right)+D \\
&= Af\left(\frac{Bx+By+2C}{2}\right)+D \\
&= Af\left(\frac{Bx+C}{2}+\frac{By+C}{2}\right)+D \\
&= A\left((1-a)f(Bx+C)+af(By+C)\right)+D \\
&= (1-a)Af(Bx+C)+(1-a)D+Af(By+C)+aD \\
&= (1-a)(Af(Bx+C)+D)+a(Af(By+C)+D) \\
&= (1-a)g(x)+ag(x)
\end{aligned}
$$

O halde g'de f ile aynı özellikleri sağlamaktadır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{7}\right)=g\left(\frac{1}{7}\right) &= \frac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{7}}{8}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)} \\
&= \frac{f\left(\frac{1}{7}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)} \\
&= \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1-f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)}
\end{aligned}
$$

İkinci Çözüm: $y=0$ seçersek $f(\dfrac{x}{2})=(1-a)f(x)$ ve $x=0$ seçersek; $f(\dfrac{y}{2})=af(y)$ olur. Yani $f(\dfrac{x}{2})=(1-a)f(x)=af(x)$ olur. $x=1$ alırsak; $f(1)(1-a)=af(1)$, $1-a=a$, $a=\dfrac{1}{2}$ olmalıdır. Yani $f(\dfrac{x+y}{2})=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ dir. $x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{28}$ seçersek; $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{28})}{2}$ olur. $f(\dfrac{x}{2})=\dfrac{f(x)}{2}$ olduğundan, $f(\dfrac{1}{28})=\dfrac{f(\frac{1}{14})}{2}=\dfrac{f(\frac{1}{7})}{4}$ ve $f(\dfrac{1}{4})=\dfrac{f(\frac{1}{2})}{2}=\dfrac{f(1)}{4}=\dfrac{1}{4}$, $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{f(\frac{1}{7})}{4}}{2}$, $8f(\dfrac{1}{7})=1+f(\dfrac{1}{7})$ ve $f(\dfrac{1}{7})=\dfrac{1}{7}$ bulunur.

99. Her x, y gerçel sayı ikilisi için, $f(xf(x)+f(y))=[f(x)]^2+y$ denklemini sağlayan tüm $f:R\to R$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $f(b)=0$ olacak şekilde $b\in R$ olduğunu gösterelim. $x=0$ alalım:

$$f(0f(0)+f(y))=[f(0)]^2+y$$

$$f(f(y))=[f(0)]^2+y$$

$y = -(f(0))^2$ olarak alalım:

$$f(f(-f(0)^2)) = -[f(0)]^2 + [f(0)]^2 = 0$$

bulunur. Bu durumda $b = f(-f(0)^2)$ için $f(b) = 0$ dır. Yani böyle bir b vardır. Eğer $x = b$ alırsak $f(bf(b) + f(y)) = [f(b)]^2 + y$ elde ederiz. $f(b) = 0$ olduğu için $f(f(y)) = y$ bulunur. $x = f(x)$ alırsak

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = [f(f(x))]^2 + y$$

$$f(f(x)x) + f(y)) = (x)^2 + y$$

bulunur. Aynı zamanda $f(xf(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y$ de verilmişti. Bu iki eşitlikten

$$(x)^2 + y = [f(x)]^2 + y$$

bulunur. Dolayısıyla $(f(x))^2 = x^2$ dir.
Şimdi ise her x gerçel sayısı için $f(x) = x$ veya her x gerçel sayısı için $f(x) = -x$ olacağını gösterelim: Aksini varsayarsak $f(a) = a,\ f(b) = -b$ olacak şekilde sıfırdan farklı a, b gerçel sayıları bulunabilir. Sorudaki denklemde $x = a,\ y = b$ alırsak; $f(a^2 - b) = a^2 + b$ olur. $\big(f(a^2 - b)\big)^2 = (a^2 - b)^2$ olduğundan; $a^2 + b = a^2 - b$ veya $a^2 + b = b - a^2$ bulunur.
$a^2 + b = a^2 - b$ ise $b = 0$, $\quad a^2 + b = b - a^2$ ise $a = 0$ olur. Ancak a ve b sıfırdan farklıydı. Bu bir çelişkidir. Yani $f(x) = x$ veya $f(x) = -x$ dir. Her iki fonksiyon da soruda verilen denklemi sağlarlar.

100. $a + b + c + d = 1$ denklemini sağlayan a, b, c, d pozitif gerçel sayıları için,

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle, $0 < a, b, c, d < 1$ olduğundan, $0 < x < 1$ değerleri için $f(x) = 6x^3 - x^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada iddiamız, $f(x) = 6x^3 - x^2 \geq \dfrac{5x - 1}{8}$ olduğudur.

Eşitsizliğin iki tarafını 8 ile çarpıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda $0 < x < 1$ için,

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = (4x - 1)^2(3x + 1)$ olduğundan eşitsizlik $0 < x < 1$ için sağlanacaktır. Yani iddiamız doğrudur. Dolayısıyla bulduğumuz eşitsizlikte x yerine a, b, c ve d değerlerini yazıp taraf tarafa topladığımızda

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq \frac{5(a+b+c+d)}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

elde ederiz. Yani $6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq \frac{1}{8}$ eşitsizliği $0<a,b,c,d<1$ ve $a+b+c+d=1$ için sağlanır.

101. Bir gün okul sonrasında, Murat fazladan bir matematik dersine daha katılmak zorundaydı. Öğretmen tahtaya katsayıları tam sayı olan ikinci dereceden bir $x^2+p_1x+q_1=0$ denklemini yazacak ve Murat bu denklemin çözümlerini bulacaktır. Eğer çözümlerin ikisi birden tam sayı değilse Murat eve dönebilecektir. Eğer denklemin çözümleri tam sayıysa öğretmen p_2 ve q_2, bir önceki sorunun çözümlerinin herhangi bir sıralaması olacak şekilde yeni bir $x^2+p_2x+q_2=0$ denklemi yazacak ve her şey baştan başlayacaktır. Öğretmenin, Murat'ı sonsuza dek okulda tutabilmesini sağlayacak tüm olası p_1, q_1 sayılarının bulunuz.

Çözüm: Cevap p_1 herhangi bir tamsayı ve $q_1=0$ veya $p_1=1$ ve $q_1=-2$'dir.

Eğer $q_1=0$ ise denklemimiz, çözümleri $-p_1$ ve 0 olan $x^2+p_1x=0$ olur. Öğretmen yeni soru olarak, çözümü $-p_1$ ve 0 olan $x^2-p_1x=0$ denklemini yazabilir ve sonra tekrar $x^2+p_1x=0$ yazarak devam edebilir. Dolayısıyla tüm $(p_1,0)$ ikilileri problemin koşullarını sağlar.

Eğer $q_1=-1$ ise çözümlerin çarpımı -1 olmalıdır ve çözümler -1 ile 1 sayılarının bir sıralamasıdır. $x^2-x+1=0$ ve $x^2+x-1=0$ denklemleri hiçbir tam sayı köke sahip olmadığı için, problemin koşullarını sağlayan $(p_1,-1)$ şeklinde hiçbir ikili yoktur.

Eğer $q_1=-2$ ise çözümlerin çarpımı -2 olmalıdır. Bu durumda çözümler 2 ve -1 ise ilk durumda öğretmen $x^2+2x-1=0$ ve $x^2-x+2=0$ denklemlerinden birisini seçecektir, hiçbirinin tam sayı çözümü yoktur. Daha sonra çözümleri 1 ve -2 olan $x^2+x-2=0$ denklemini elde ederiz. Bu nedenle $(1,-2)$ ikilisinin problemin koşullarını sağladığını görüyoruz.

Şimdi $q_1=0,\ -1,\ -2$ seçeneklerinden hiçbirinin doğru olmadığını düşünelim. x_1 ve x_2, $x^2+p_1x+q_1=0$ denkleminin çözümleri olsun. Bu da $x_1+x_2=-p_1$, $x_1x_2=q_1$ ve

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p_1^2-2q_1<p_1^2+q_1^2$$

olmasını gerektirir.

Bundan dolayı, verilen eşitliğin katsayılarının kareleri toplamı $q_1\notin[-2,0]$ için kesin bir düşüş gösterir. Kareler toplamı negatif olmayan bir sayı olduğu için er ya da geç, bu iki durumdan birisine ulaşırız; çözümler tamsayı değildir veya sabit terim

$[-2, 0]$ aralığının bir elemanıdır. Son durum önemlidir, çünkü $x^2+px+q=0$ eşitliği, kendisinden önce yazılan polinomu, $x^2-(p+q)x+pq=0$, tek bir şekilde belirler. Dolayısıyla, $(p_1, 0)$ ve $(1, -2)$ sadece sabit terimi sırasıyla 0 veya -2 olan fonksiyonlar arasından çıkar. Bundan dolayı problemin koşullarını sağlayan bunlar dışında hiçbir ikili yoktur.

102. Doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine olan ve

$$f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2}$$

koşulunu sağlayan bütün birebir $f(n)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle herhangi bir n için $f(n) > n$ eşitsizliğinin mümkün olmayacağını gösterelim. Farz edelim ki bir n doğal sayısı için $f(n) > n$ olsun.

$$f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2} < \frac{f(n)+f(n)}{2} = f(n)$$

Buradan $f(f(n)) < f(n)$ elde edilir.
f fonksiyonunun kendisi ile k defa bileşkesini $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ olarak gösterelim. $f^2(n) < f(n)$ olduğunu gösterdik. f fonksiyonunun verilen koşulu sağladığını varsayarsak $f^3(n)$ için

$$f^3(n) = f(f(f(n))) \leq \frac{f(n)+f^2(n)}{2} < \frac{f^2(n)+f^2(n)}{2} = f^2(n) < f(n)$$

olur. Tümevarım ile her $p = 2, 3, \ldots$ değeri için $f^p(n) < f(n)$ olduğunu kolayca görürüz. $(f^k(n))_k$ ifadesini k ya bağlı, doğal sayılardan oluşan bir dizi olarak düşünelim. $f^p(n) < f(n)$ koşulundan ötürü bu dizi üstten sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla $l < m$ ve $f^l(n) = f^m(n)$ olacak şekilde l ve m değerleri bulabiliriz. Birebir fonksiyonların bileşkeleri de birebir fonksiyonlardır. Dolayısıyla her p değeri için f^p birebir fonksiyondur. Buradan $f^m(n) = f^l(f^{m-l}(n)) = f^l(n)$ elde ederiz. Ayrıca, f^l nin birebir olması $f^{m-l}(n) = n$ olmasını gerektirir. Bu eşitlikten, $f(f^{m-l}(n)) = f^{m-l+1}(n) = f(n)$ buluruz. Ancak biz her $p = 2, 3, \ldots$ değeri için $f^p(n) < f(n)$ olduğunu göstermiştik. $f(f^{m-l}(n)) = f^{m-l+1}(n) = f(n)$ bir çelişkidir. Dolayısıyla $f(n) > n$ hiçbir n doğal sayısı için geçerli olamaz. Buradan her n doğal sayısı için $f(n) \leq n$ elde ederiz. $n = 0$ için $f(0) = 0$ olduğu açıktır. Herhangi bir n değeri için $f(n) = n$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun birebir olması ve $f(n+1) \leq n+1$ koşulları $f(n+1) = n+1$ olmasını gerektirir. Tümevarım ile her n doğal sayı değeri için $f(n) = n$ elde ederiz. Bu fonksiyonun bizden istenilen koşulu sağladığı ve bu fonksiyondan başka hiçbir fonksiyonun verilen koşulu sağlayamayacağı açıktır.

103. $a, b, c \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı ve kökleri

tam sayı olan

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ikinci dereceden fonksiyonların sayısı, herhangi bir pozitif n tam sayısı için $P(n)$ ile gösterilsin.

Yukarıdaki özelliklere sahip f fonksiyonları ve bütün $n \geq 4$ değerleri için $n < P(n) < n^2$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ ve $k = 2, 3, ..., n$ değerleri için $x^2 + kx + k - 1 = (x+1)(x+k-1) = 0$ ikinci derece denklemleri, tam sayı köklere sahip olduklarından dolayı, $n \geq 4$ için $P(n) > n$ sonucunu çıkarırız. Verilen koşulları sağlayan f fonksiyonu için,

$$f(x) = a(x+d)(x+e);\ d, e \in \mathbb{Z},\ a, a(d+e), ade \in \{1, 2, ..., n\}$$

yazarız. Özel olarak, $e \leq \frac{n}{ad}$ seçerek,

$$\begin{aligned} P(n) \leq \sum_{a=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{n}{ad} &= n \sum_{a=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{ad} \\ &= n \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + ... + \frac{1}{na}\right) \\ &= n \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

buluruz. $n \geq 5$ için, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$ (n üzerine tümevarım yöntemi kullanılarak bulunur) ve $P(4) = 5$ olduğundan dolayı, $P(n) < n^2$ sonucuna varırız.

104. $a + b + c = 3$ denklemini sağlayan a, b ve c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm:
Birinci Çözüm: $x = ab + bc + ca$ olsun. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ olduğundan

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

buradan da,

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

elde edilir. Bunların sonucunda da $0 \leq x \leq 3$ ve $abc \leq \dfrac{x^2}{9}$ elde edilmiş olur. Öte yandan,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9-2x$$

ve

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{x^2}{a^2b^2c^2} - \frac{6}{abc}$$

olduğundan, soruda verilen eşitsizlik,

$$x^2 - 6abc \geq (9-2x)a^2b^2c^2$$

haline gelir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} x^2 - 6abc - (9-2x)a^2b^2c^2 &\geq x^2 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^4(9-2x)}{81} \\ &= \frac{x^2(2x^3-9x^2+27)}{81} \\ &= \frac{x^2(x-3)^2(2x+3)}{81} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik ispatlanmıştır. Eşitlik durumuysa, ancak ve ancak $a=b=c=1$ durumunda mümkündür.

İkinci Çözüm:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x$$

olsun. Buradan,

$$\frac{1}{x^2} - x^2 = (1-x)f(x)$$

çıkar. Ayrıca $E = \sum(\frac{1}{a^2} - a^2) = \sum(1-a)f(a)$ olsun. Genelliği bozmadan $a \geq b \geq c$ olmak üzere, $1-c = (a-1)+(b-1)$ ve $1-a = (c-1)+(b-1)$ ifadelerini kullanarak,

$$E = (1-b)(f(b)-f(c)) + (1-a)(f(a)-f(c))$$

ve

$$E = (1-b)(f(b)-f(a)) + (1-c)(f(c)-f(a))$$

elde edilir. Şimdi, $x \leq y$ için $f(x) \geq f(y)$ ifadesini gösterelim:

$$f(x) - f(y) = \frac{x-y}{x^2y^2}(x^2y^2 - xy - x - y)$$

$x + y = k$ için, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden $x + y + xy \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2}$ elde edilir. $3\sqrt[3]{x^2y^2} \geq x^2y^2$ eşitsizliğini elde edebilmek için $3^3 \geq x^4y^4$ olması gerekir, ancak $k \geq 2\sqrt{xy}$ olduğu için $k^8 \geq 2^8x^4y^4$ olacağından, $3^3 \geq \frac{k^8}{2^8}$ olması yeterli olacaktır ki bu da, $k \leq 2\sqrt[8]{27}$ olarak görülebilir.

Fakat x,y eğer a,b,c içinden herhangi ikisi olursa, $x + y \leq 3$ olacağından $3 \leq 2\sqrt[8]{27}$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlik sağlanmış olacaktır.

Bu, f fonksiyonunun azalan fonksiyon olduğunu gösterir. Sonuç olarak geriye sadece $b \geq 1$ durumu için (**??**) bağıntısını, $b \leq 1$ içinse (**??**) bağıntısını kullanmak kalır.

Not: Eğer burada eşitsizliği 3 değişkenli değil, n değişkenli olarak düşünürsek,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \text{iken,} \qquad x_i \geq 0 \quad \text{için,} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ifadesi ancak $n = 10$ değerine kadar doğrudur. $n \geq 11$ iken yanlıştır, örneğin, $x_1 = \cdots = x_{10} = 0.6$, $x_{11} = 5$ ve $i \geq 12$ için $x_i = 1$ olarak alınabilir. $4 \leq n \leq 10$ için gerekli olan ispat, karmaşık değişkenler teknikleri gerektirir.

105. 271 sayısını, çarpımları maksimum olacak şekilde, pozitif gerçel sayıların toplamı olarak yazınız.

Çözüm: Aritmetik ortalama - geometrik ortalama eşitsizliğine göre, negatif olmayan $x_1, \cdots, x_n$ sayıları için

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{1/n}$$

ve eşitlik ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ durumunda geçerlidir.

Bizim durumumuzda sayıların toplamı 271 dir. Yani negatif olmayan sayılardan oluşan bir S kümesinin eleman sayısı n olmak üzere, S deki elemanların aritmetik ortalaması $271/n$ dir. Böyle S kümeleri için geometrik ortalamanın, dolayısıyla da çarpımın, maksimum değeri sayıların eşitliği durumunda elde edilir.

Dolayısıyla biz, x tamsayı olmak üzere, $y = (271/x)^x$ ifadesinin maksimum değerini arıyoruz. x bir gerçel sayı gibi düşünülüp logaritmik türev alınırsa;

$$\begin{aligned}
&\ln y = x\ln(271/x) = x(\ln 271 - \ln x),\\
&y'/y = \ln 271 - \ln x - 1,\\
&y' = (271/x)^x(\ln 271 - \ln x - 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $y' = 0$ olması için, $x = 271/e \approx 99.7$ olmalıdır ve y nin maksimum değerinin $x = 271/e$ için elde edileceği açıktır. ($x < 271/e$ iken $y' > 0$ ve $x > 271/e$ iken $y' < 0$ olduğuna dikkat ediniz.)

x bir tam sayı olduğu için, 100 ve 99 değerlerini denememiz yeterlidir. Deneme sonunda y nin en büyük değerini (x tam sayı iken) $x = 100$ durumunda aldığını göreceğiz.

Dolayısıyla çarpımın maksimum değeri $271 = 2.71+2.71+\cdots+2.71$ şeklinde yazılınca elde edilir.

106. Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan bütün (x, y, z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz. Not: $[r]$: r gerçel sayısının tamsayı kısmı, $\{r\}$: r gerçel sayısının ondalık kısmı.

$$x + [y] + \{z\} = 200,2$$

$$\{x\} + y + [z] = 200,1$$

$$[x] + \{y\} + z = 200,0$$

Çözüm: $[r]+\{r\} = r$ eşitliğini gözönünde bulundurarak verilen üç denklem toplanırsa $x+y+z = 300,15$ bulunur. İlk denklemi, bulunan denklemden çıkarırsak $(y-[y])+(z-\{z\}) = 99,95$ yani $\{y\} + [z] = 99,95$ bulunur. Dolayısıyla $\{y\} = 0,95$, $[z] = 99$ dur. Benzer şekilde $[x] + \{z\} = 100,05$ ve $\{x\} + [y] = 100,15$ bulunur. Dolayısıyla $[x] = 100$, $\{z\} = 0,05$, $\{x\} = 0,15$ ve $[y] = 100$ bulunur. Sonuç olarak $x = 100,15$, $y = 100,95$ ve $z = 99,05$ bulunur.

107. $\Re-\{0\}$ kümesinde tanımlı ve $f(x)+8f(\frac{1}{x}) = -63x$ denklemini sağlayan fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm:$f(x) + 8f(\frac{1}{x}) = -63x$ denkleminde x yerine $\frac{1}{x}$ yazarsak

$$8f(x) + f(\frac{1}{8}) = -\frac{63}{x}$$

denklemi elde edilir. İkinci denklemi -8 ile çarpıp ilk denklemle topladığımızda

$$-63f(x) = -63x + \frac{63\cdot 8}{x}$$

eşitliği bulunur. Eşitliğin her iki tarafını da -63'e bölersek f fonksiyonu

$$f(x) = x - \frac{8}{x}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $f(x) = x - \frac{8}{x}$'in de verilen denklemi sağladığı kolayca kontrol edilebilir.

108. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$ ise $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8} - \dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ ifadesini k cinsinden hesaplayınız.

Çözüm: $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x^2}{y^2}-1} + \dfrac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x^2}{y^2}+1}$ olduğundan, $\dfrac{x^2}{y^2} = m$ dersek $k = \dfrac{m+1}{m-1} + \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1}$ olur. Buradan $\dfrac{m^2+1}{m^2-1} = \dfrac{k}{2}$, $\dfrac{2}{m^2-1} = \dfrac{k-2}{2}$, $m^2 = \dfrac{k+2}{k-2}$ bulunur. Buna göre

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} - \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{m^4+1}{m^4-1} - \frac{m^4-1}{m^4+1} = \frac{4m^4}{m^8-1} = \frac{4}{m^4 - \frac{1}{m^4}} = \frac{4}{\left(\frac{k+2}{k-2}\right)^2 - \left(\frac{k-2}{k+2}\right)^2} =$$

$$\frac{4(k+2)^2(k-2)^2}{(k+2)^4-(k-2)^4} = \frac{4(k^2-4)^2}{2(k^2+4)8k} = \frac{(k^2-4)^2}{4k(k^2+4)} \text{ olur.}$$

109. a, b, x, y gerçel sayıları için $a^3 + ax + y = b^3 + bx + y = c^3 + cx + y = 0$ ve a, b, c birbirinden farklı ise $a + b + c = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $P(k) = k^3 + xk + y$ polinomu için $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ ve a, b, c birbirinden farklı olduğu için, bu polinomun tüm kökleri a, b ve c dir. Vieta teoreminden $a + b + c = -\dfrac{0}{1} = 0$ bulunur.

110. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$ ise $(x+y)$ nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm: $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ olduğundan $x + y = a$ ve $xy = b$ alarak $a^3 - 3ab + a^3 + 30b = 2000$ yazabiliriz. Buradan $3b(10-a) = 2000 - 2a^3 = 2(10^3 - a^3)$ bulunur. $3b(10-a) = (10-a)(100+10a+a^2)$ eşitliği $a \neq 10$ durumunda $3b = a^2 + 10a + 100$ eşitliğini verir. Ancak $(x+y)^2 \geq 4xy$ olduğundan $a^2 + 10a + 100 > a^2 \geq 4b > 3b$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $x + y = a = 10$ olmalıdır.

111. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için $\dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{c(b+c)} + \dfrac{1}{a(c+a)} \geq \dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3 \quad (i)$$

olur. Yine aynı eşitsizlikten $a^3b + c^2ab \geq 2a^2bc$, $b^3c + a^2bc \geq 2b^2ac$, $c^3a + b^2ac \geq 2c^2ab$ ve $a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2ac$, $a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$, $b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2c^2ab$ olur. Taraf tarafa toplarsak; $a^3b+b^3c+c^3a \geq abc(a+b+c)$ ve $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ bulunur. Buradan da

$$a^3b + b^3c + c^3a + (ab+bc+ca)^2 \geq 4abc(a+b+c) \quad (ii)$$

olur. (i) den dolayı $\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{27}{8(a+b+c)^3}$ (iii) bulunur. (ii) ve (iii) taraf tarafa çarpılarak

$$\frac{a^3b + b^3c + c^3a + (ab+bc+ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27abc}{2(a+b+c)^2}$$

buradan da

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} = \frac{a^3b + b^3c + c^3a + (ab+bc+ca)^2}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

olur.

112. $a \neq 0, b, c$ gerçel sayıları için $(a+b+c)(4a-2b+c) < 0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki farklı gerçel kökünün olduğunu ispatlayınız.

Çözüm:

Birinci Çözüm $a+b+c<0$ ise $4a-2b+c>0$ olur. Eğer $ac<0$ ise $b^2>4ac$ olacağından denklemin iki farklı gerçel kökü olur. $ac=0$ ise $a\neq 0$ olduğundan $c=0$ olur. Bu durumda $a+b<0$, $2a>b$ olduğundan $b\neq 0$ dır. Yani $b^2>4ac=0$ olur. $ac>0$ ise iki durum vardır: $a,c>0$ ise $b<0$ olmalıdır. $a+c<-b$, $a^2+c^2+2ac<b^2$, $4ac \leq a^2+c^2+2ac=(a+c)^2<b^2$ olur. $a,c<0$ durumunda ise $0>4a+c>2b$ ve $4b^2>16a^2+8ac+c^2\geq 16ac$ ve $b^2>4ac$ olur.
$a+b+c>0$ ise $4a-2b+c<0$ olur. Yine $ac<0$ veya $ac=0$ olamaz. $a,c>0$ ise $0<4a+c<2b$ ve $b>0$ olur. $4b^2>(4a+c)^2=16a^2+8ac+c^2\geq 16ac$, $b^2>4ac$ olur. $a,c<0$ ise $0>a+c>-b$, $b>0$ olur. $b>-a-c>0$, $b^2>(a+c)^2=a^2+c^2+2ac\geq 4ac$ ve $b^2>4ac$ olur. Böylece ispat biter.

İkinci Çözüm $p(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. $p(1) = a + b + c$ ve $p(-2) = 4a - 2b + c$ olduğundan $p(1)p(-2) < 0$ ve $p(x)$ sürekli olduğu için Ara Değer Teoreminden $p(x)$ in $(-2, 1)$ aralığında bir gerçel kökü vardır. $p(x)$ gerçel katsayılı olduğundan ve kökleri toplamı Vieta teoreminden $\frac{-b}{a} \in \mathbf{R}$ olduğundan diğer kökü de gerçeldir. Aynı zamanda bu iki kök birbirine eşit olamaz. Çünkü, eşit olurlarsa $a > 0$ için $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, $a < 0$ için $p(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ olur. Ancak $p(1)p(-2) < 0$ olduğundan $p(1) > 0,\ p(-2) < 0$ ya da $p(1) < 0\ \ p(-2) > 0$ dır. Yani kökler farklı olmalıdır.

113. x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} < 0$ ise sorudaki eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \geq 0$ ise $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff (x^2+y^2)(x+y)^2 \leq 8(x^2-xy+y^2)^2 \iff x^4+y^4+2x^3y + 2xy^3 + 2x^2y^2 \leq 8(x^4 + y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3) \iff 7(x^4 + y^4) - 18(x^3y + xy^3) + 22x^2y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2(7x^2 - 4xy + 7y^2) \geq 0$ olur. $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 5(x^2 + y^2) + 2(x-y)^2 \geq 0$ ve $(x-y)^2 \geq 0$ olduğundan ispat biter.

114.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 20 \\ ab + bc + cd + da + bd + ac &= 150 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan tüm a, b, c, d gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: $(x-y)^2 \geq 0$ olduğundan, bütün gerçel sayılar için $x^2 + y^2 \geq 2xy$ dir. Buradan çıkan $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $b^2 + d^2 \geq 2bd$, $c^2 + d^2 \geq 2cd$, $a^2 + d^2 \geq 2ad$, $b^2 + d^2 \geq 2bd$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + bc + cd + da + ac + bd)$ elde ederiz. $2 \cdot 20^2 = 3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+bc+cd+da+ac+bd) = 8 \cdot 150$ ve $3 \cdot 20^2 = 8 \cdot 150$ olduğundan $3(a + b + c + d)^2 = 8(ab + bc + cd + da + ac + bd)$ çıkar. Eşitlik ancak ve ancak ilk eşitsizliklerin herbiri birer eşitlikken yani $a = b = c = d$ durumunda mümkündür. Buna göre $a + b + c + d = 20$ olduğundan $a = b = c = d = 5$ tek çözümdür.

115. x, y, z gerçel sayıları için $0 < x, y, z < 1$ ve $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ ise $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az birinin $\frac{1}{4}$ den küçük veya eşit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Eğer $(1-x)y > \dfrac{1}{4}$, $(1-y)z > \dfrac{1}{4}$, $(1-z)x > \dfrac{1}{4}$ ise $xyz(1-x)(1-y)(1-z) > \dfrac{1}{64}$ olur. $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ olduğu için $xyz > \dfrac{1}{8}$ bulunur. Aynı zamanda Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $(1-x)x \le \dfrac{1}{4}$, $(1-y)y \le \dfrac{1}{4}$, $(1-z)z \le \dfrac{1}{4}$ olduğundan $xyz(1-x)(1-y)(1-z) \le \dfrac{1}{64}$ buradan da bir önce bulduğumuz eşlitsizlikle çelişir şekilde $xyz \le \dfrac{1}{8}$ bulunur. Bu durumda $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ sayılarından en az biri $\dfrac{1}{4}$ den küçük veya eşittir.

116. a_1, a_2, a_3 gerçel sayılarının herbirinin 1 den büyük olduğu ve her $i = 1, 2, 3$ için $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ olduğu bilindiğine göre $\dfrac{1}{a_1+a_2} + \dfrac{1}{a_2+a_3} + \dfrac{1}{a_3+a_1} > 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\dfrac{a_1^2}{a_1-1} > a_1 + a_2 + a_3$ ise $\dfrac{a_1^2}{a_1-1} - a_1 > a_2 + a_3$ buradan $\dfrac{a_1}{a_1-1} > a_2 + a_3$, $a_1 > (a_1-1)(a_2+a_3)$, $a_1+a_2+a_3 > a_1(a_2+a_3)$ ve $\dfrac{1}{a_2+a_3} > \dfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$ olur. Benzer şekilde $\dfrac{1}{a_1+a_3} > \dfrac{a_2}{a_1+a_2+a_3}$ ve $\dfrac{1}{a_1+a_2} > \dfrac{a_3}{a_1+a_2+a_3}$ olur. Taraf tarafa toplanarak $\dfrac{1}{a_1+a_2} + \dfrac{1}{a_1+a_3} + \dfrac{1}{a_2+a_3} > \dfrac{a_2}{a_1+a_2+a_3} + \dfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3} + \dfrac{a_3}{a_1+a_2+a_3} = 1$ bulunur.

117. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin üç gerçel kökü vardır. $-2 \le a+b+c \le 0$ ise bu üç kökten en az birinin $[0, 2]$ aralığında yer alacağını ispatlayınız.

Çözüm: $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ olsun. $a+b+c = p(1) - 1$ olduğundan $-2 \le p(1) - 1 \le 0$ buradan $-1 \le p(1) \le 1$ yani $|p(1)| \le 1$ olur. Öte yandan $p(1) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ olduğundan $|(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)| \le 1$ çıkar. $|1-x_1|$, $|1-x_2|$, $|1-x_3|$ sayılarının üçünün birden 1 den büyük olması $1 < |1-x_1| \cdot |1-x_2| \cdot |1-x_3| = |(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)| \le 1$ çelişkisini vereceği için, genelliği bozmadan $|1-x_1| \le 1$ kabul edebiliriz. Bu durumda $-1 \le 1 - x_1 \le 1$ yani $0 \le x_1 \le 2$ dir. Sonuç olarak $p(x)$ in en az bir kökü $[0, 2]$ aralığındadır.

118. a, b, c gerçel sayıları için

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= abc\\(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) &= a^3b^3c^3\end{aligned}$$

ise $abc = 0$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a^2+b^2 \geq 0$ ve $a^2+b^2 \geq 2ab$ olduğundan $a^2+b^2-ab \geq |ab|$ dir. Buna göre $|a+b|\cdot|a^2-ab+b^2| \geq |a+b|\cdot|ab|$ yazılabilir ve buradan da $|a^3+b^3| \geq |a+b|\cdot|ab|$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $|b^3+c^3| \geq |b+c|\cdot|bc|$ ve $|c^3+a^3| \geq |c+a|\cdot|ca|$, bunları da taraf tarafa çarparak $|a^3+b^3|\cdot|b^3+c^3|\cdot|c^3+a^3| \geq a^2b^2c^2|(a+b)(b+c)(c+a)|$ elde edilir. $|a^3b^3c^3| \geq a^2b^2c^2|abc| = |a^3b^3c^3|$ olduğundan eşitlik durumunun sağlanması için ilk baştaki eşitsizliklerin her birinin eşitlik olması gerekmektedir. Bu durumda $|a^3+b^3| = |a+b|\cdot|ab|$, $|b^3+c^3| = |b+c|\cdot|bc|$, $|c^3+a^3| = |c+a|\cdot|ca|$ olur. Buradan $|a+b|(|a^2+b^2-ab|-|ab|) = 0$ çıkar. $|a+b|$, $|b+c|$, $|c+a|$ dan herhangi biri 0 ise $abc = 0$ olur. Hiçbiri sıfır değilse $|a^2+b^2-ab| = |ab|$ buradan da $a^2+b^2-ab = ab$ veya $a^2+b^2-ab = -ab$ bulunur. $a^2+b^2-ab = ab$ durumunda $(a-b)^2 = 0$, yani $a = b$, $a^2+b^2-ab = -ab$ durumunda ise $a = b = 0$, sonuç olarak her iki durumda da $a = b$ çıkar. Benzer şekilde $b = c$ ve $c = a$ olmalıdır. $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ denkleminden $2a2b2c = a^3$, $8a^3 = a^3$, $a = b = c = 0$ olur.

119. Negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $a_1, a_2, \ldots$ dizisi tüm n pozitif tam sayıları için; $a_n + a_{2n} \geq 3n$ ve $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ koşullarının ikisini birden sağlıyor. Buna göre

a-) Her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq n$ olduğunu gösteriniz.

b-) Soruda verilen şartları sağlayan bir a_n dizisi bulunuz.

Çözüm:

a-) Eğer $a_k < k$ koşulunu sağlayan bir $k \in \mathbf{N}$ varsa; $a_{k+1} + k \leq 2\sqrt{a_k(k+1)} < 2\sqrt{k(k+1)}$ olur. $2\sqrt{k(k+1)} - k < k+1 \iff 4k(k+1) < (2k+1)^2 \iff 0 < 1$ olduğundan $a_{k+1} < 2\sqrt{k(k+1)} - k < k+1$ olur. Benzer şekilde $a_{k+2} < k+2$, $a_{k+3} < k+3, \ldots a_{2k} < 2k$ olur. Buradan $a_k + a_{2k} < k + 2k = 3k$ çıkar ki bu da $a_k + a_{2k} \geq 3k$ ile çelişir. Buna göre tüm $n \in \mathbf{N}$ doğal sayıları için $a_n \geq n$ olmalıdır.

b-) $a_n = n+1$ alırsak $a_n + a_{2n} = 3n+2 > 3n$ ve $a_{n+1} + n = 2n+2$, $2\sqrt{a_n(n+1)} = 2n+2$, $a_{n+1} + n \leq 2\sqrt{a_n(n+1)}$ olur ve koşullar sağlanır.

120. Katsayıları negatif olmayan gerçel sayılardan oluşan $p(x)$ polinomu için $p(1) \geq 1$ ise tüm pozitif gerçel sayılar için $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ olsun. $p(1) \geq 1$ olduğundan $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 1$ dir.
$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0\right)$ bu da Cauchy Schwarz eşitsizliğinden $(a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 + a_0)^2 \geq 1$ dir.

121. $0 < \alpha, \beta, \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta = 1$ ise $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \frac{3}{8}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\frac{1}{1+\tan^2 x} + \sin^2 x = 1 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$ olduğundan $\sin\alpha = a, \quad \sin\beta = b, \quad \sin\theta = c$ alarak $\tan^2\alpha = \frac{a^2}{1-a^2}, \quad \tan^2\beta = \frac{b^2}{1-b^2}, \quad \tan^2\theta = \frac{c^2}{1-c^2}$ yazabiliriz. Bu durumda $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta + 3 = \left(\frac{a^2}{1-a^2} + 1\right) + \left(\frac{b^2}{1-b^2} + 1\right) + \left(\frac{c^2}{1-c^2} + 1\right) = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}$ olur. Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğini kullanarak $\frac{\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}}{3} \geq \frac{3}{3-a^2-b^2-c^2}$ ve Karesel-Aritmetik ortalama eşitsizliğini kullanarak $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{3-a^2-b^2-c^2} \geq \frac{9}{8}$ yazabiliriz. Buna göre $\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{3-a^2-b^2-c^2} \geq \frac{27}{8}$, bir başka deyişle $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\theta \geq \frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}$ dir.

122. $a_1 = 1, \; a_2 = \frac{1}{2}$ ve $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_k + \frac{a_{k+1}}{2}$ ise,
$\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} < 4$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a_{k+2} = a_k + \frac{a_{k+1}}{2}$ olduğundan $2(a_{k+2} - a_k) = a_{k+1}$ dir. Her iki tarafı $a_k a_{k+1} a_{k+2}$ ile bölersek $\frac{2}{a_k a_{k+1}} - \frac{2}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{a_k a_{k+2}}$ bulunur. Buradan $\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} = \left(\frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_2a_3}\right) + \left(\frac{2}{a_2a_3} - \frac{2}{a_3a_4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{a_{98}a_{99}} - \frac{2}{a_{99}a_{100}}\right) = \frac{2}{a_1a_2} - \frac{2}{a_{99}a_{100}} = 4 - \frac{2}{a_{99}a_{100}} < 4$ çıkar. (Not: tüm a_i lerin pozitif olduğu açıktır.)

123. $p(0) = 0, \; p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$ koşulunu sağlayan tüm gerçel katsayılı $p(x)$

polinomlarını bulunuz.

Çözüm: $p(0) = 0$ olduğundan $p(1) = (p(0)+1)^3 = 1$ olur. $p((1+1)^3) = (p(1)+1)^3$ olduğundan $p(8) = 8$ olur. Bu şekilde devam ederek sonsuz çoklukta x gerçel sayısı için $p(x) = x$ olduğunu görürüz. $p(x) - x$ polinomuna $q(x)$ diyelim. Sonsuz çoklukta x için $q(x) = 0$ olduğundan $q(x)$ polinomu sıfır polinomu olmalıdır. Bu durumda $p(x) = x$ polinomu, verilen koşulları da sağladığı için, tek çözümdür.

124. $f : N_0 \to N_0$ $(N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\})$ bir fonksiyon olmak üzere tüm $n \in N_0$ sayıları için $f(f(n)) = f(n) + 1$ ve $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ dir. Bu koşulları sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ olduğundan $f(n_1) = 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in N_0$ vardır. $f(f(n_1)) = f(n_1) + 1 = 2$ olduğundan $f(n_2) = 2$ olacak şekilde bir $n_2 \in N_0$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ için $f(n_j) = j$ olacak şekilde bir $n_j \in N_0$ bulunabilir. Bu durumda her $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $f(f(n_j)) = f(n_j) + 1$ ve $f(j) = j + 1$ eşitlikleri geçerlidir. $\min\{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = 1$ ve her $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $f(j) = j + 1$ olduğundan $f(0) = 1$ olmalıdır. Bu yüzden $f(n) = n + 1$ tek çözümdür.

125. Her $x, y \in \mathbf{R}$ için $f(x^2) - f(y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y = 0$ alırsak $f(x^2) - f(0) = x(f(x) - f(0))$ olur. Benzer şekilde $f(y^2) - f(0) = y(f(y) - f(0))$ dır. Buradan $(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2) = x(f(x) - f(0)) - y(f(y) - f(0))$ buradan da $yf(x) - xf(y) = yf(0) - xf(0)$ bulunur. $f(x) - f(0) = g(x)$ dersek $yg(x) = xg(y)$ olur. $y = 1$ alırsak $g(x) = xg(1)$ yani $f(x) = ax + b$, $(a, b \in \mathbf{R})$ biçiminde olmalıdır. Her $a, b \in \mathbf{R}$ ikilisi için $(ax^2 + b) - (ay^2 + b) = (x + y)[(ax + b) - (ay + b)]$ olduğundan tüm çözümler $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

126. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ise $a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $a_1^2 + 3a_2^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$ olduğunu tümevarım ile ispatlayacağız.

$n=1$ için $a_1^2 = a_1^2$ olur ve sağlanır.
$n=k-1$ için sağlanıyorsa $n=k$ için de sağlanacağını gösterelim: $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$ sayıları için $a_2^2 + 3a_3^2 + \cdots + (2k-3)a_k^2 \leq (a_2+a_3+\cdots+a_k)^2$ olur. Tüm $j=2,3,\ldots k$ için $2a_1a_j \geq 2a_j^2$ olduğundan $\sum_{j=2}^{k} 2a_1a_j \geq \sum_{j=2}^{k} 2a_j^2$ ve buradan da $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 \geq a_1^2 + \sum_{j=2}^{k} 2a_j^2 + \left(a_2^2+3a_3^2+\cdots+(2k-3)a_k^2\right) = a_1^2+3a_2^2+\cdots+(2k-1)a_k^2$ olur ve tümevarım biter. Sonuç olarak $a_1^2+3a_2^2+\cdots+(2n-1)a_n^2 \leq 1$ dir.

127. $\sin^3 x(1+\cot x) + \cos^3 x(1+\tan x) = \cos 2x$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\sin^3 x(1+\cot x) + \cos^3 x(1+\tan x) = \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$
$\sin x + \cos x = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ olur. Buradan $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$ bulunur.
i-) $\sin x + \cos x = 0$ ise $\tan x = -1$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$,
ii-) $1 + \sin x - \cos x = 0$ ise $1 = \cos x - \sin x = \dfrac{-\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ olur. $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi$ veya $x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - (\dfrac{-\pi}{4}) + 2k\pi$ olur. Yani $x = 2k\pi$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ şeklindedir. Ancak soruda verilen denklemde $\tan x$ ve $\cot x$ bulunduğundan $\sin x$ ve $\cos x$ sıfır olmamalıdır. Yani $x = 2k\pi$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ olamaz. Çözüm kümesi $\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi;\ \ k \in \mathbf{Z}\}$ dir.

128. $\dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ denklemini gerçel sayılar kümesinde çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x-1}} - (1 + \dfrac{1}{x^2})\sqrt{x-1}$ ve
$\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{x^2(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-x+1)}{x^2\sqrt{x-1}}$ olur.
$x^2-x+1=0$ denkleminin gerçel çözümü olmadığından $x^2+x-1 = \sqrt{x-1}(x^2+1)$ olur. Buradan $(x^2 - \sqrt{x-1})(1 - \sqrt{x-1}) = 0$ bulunur. $x > 1$ olduğundan ($\sqrt{x-1} \in \mathbf{R}$), $x^4 > x$ ve $x^2 > \sqrt{x-1}$ dir. Yani $1 - \sqrt{x-1} = 0$ olmalıdır. Buradan $x = 2$ bulunur ve $x = 2$ verilen koşulları sağlayan tek gerçel sayıdır.

129. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere $\dfrac{a}{2a+b}+\dfrac{b}{2b+c}+\dfrac{c}{2c+a}\leq 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $\dfrac{a}{2a+b}+\dfrac{b}{2b+c}+\dfrac{c}{2c+a}\leq 1 \iff \dfrac{2a}{2a+b}+\dfrac{2b}{2b+c}+\dfrac{2c}{2c+a}\leq 2 \iff \left(1-\dfrac{2a}{2a+b}\right)+\left(1-\dfrac{2b}{2b+c}\right)+\left(1-\dfrac{2c}{2c+a}\right)\geq 1 \iff \dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a}\geq 1$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;
$[(2a+b)b+(2b+c)c+(2c+a)a]\left[\dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a}\right]\geq (b+c+a)^2$ ve buradan da $\dfrac{b}{2a+b}+\dfrac{c}{2b+c}+\dfrac{a}{2c+a}\geq \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$ olur ve ispat biter.